MATEMÁTICA

K

LIVRO DE RESOLUÇÕES
(2ª PARTE)

KUMON

Março/2004

KUMON INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

K 101a KUMON Funções de Grau Superior

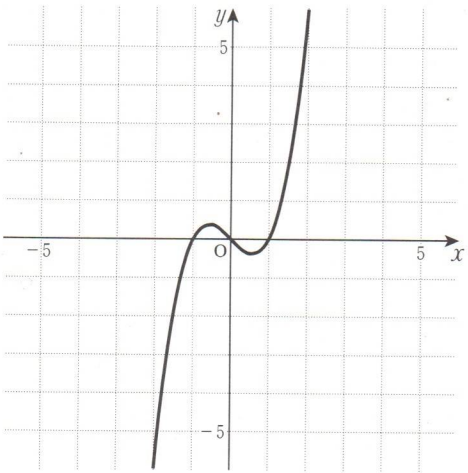
(25 pontos)

1. Construa o gráfico da seguinte ***função do 3º grau***.

Ex.

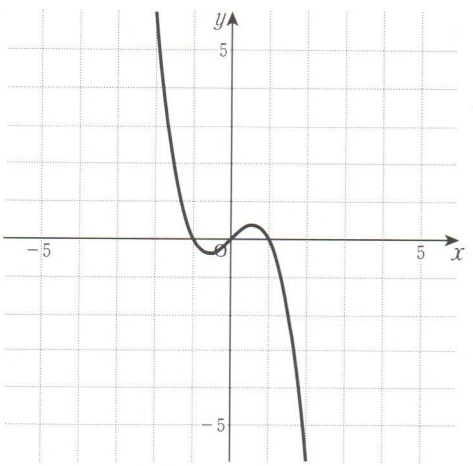
$y = x(x-1)(x+1)$

x	y
-2	-6
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$
1	0
2	6



(1) $y = -x(x-1)(x+1)$

x	y
-2	**6**
-1	**0**
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$
0	**0**
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$
1	**0**
2	**−6**



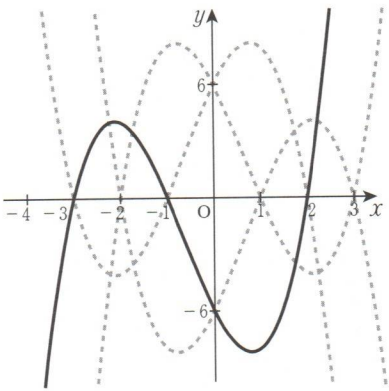
Uma função que pode ser escrita como $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ é chamada de ***função do 3º grau*** ou ***função cúbica.*** $y = x(x-1)(x+1)$ é uma ***função do 3º grau***, uma vez que ela se torna $y = x^3 - x$ quando é expandida.

K 10 1 b

2. Trace os gráficos das seguintes funções do 3º grau.

Ex.

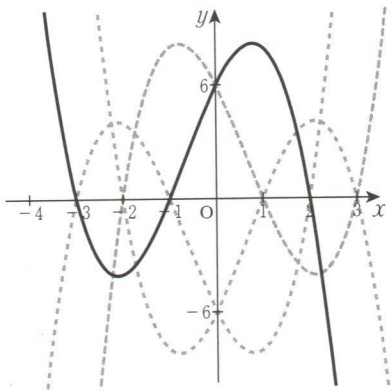
$y=(x+3)(x+1)(x-2)$



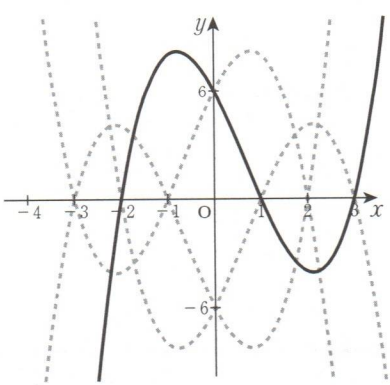
Nota: Se $-3<x<-1$, então $y>0$.

(Por exemplo, se substituirmos $x=-2$, teremos $y=4>0$.)

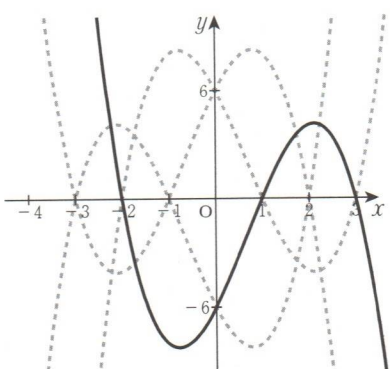
(2) $y=-(x+3)(x+1)(x-2)$



(1) $y=(x+2)(x-1)(x-3)$



(3) $y=-(x+2)(x-1)(x-3)$

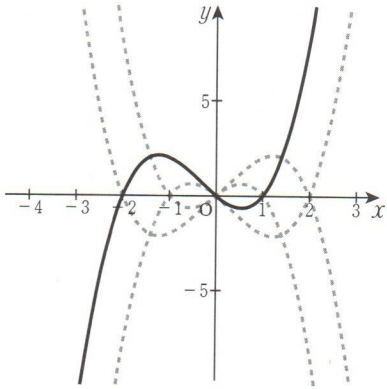


K 102a KUMON Funções de Grau Superior

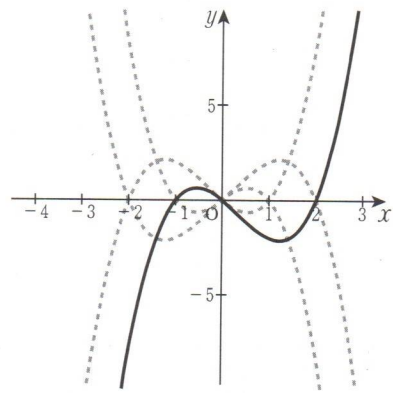
(14 pontos)

1. Trace os gráficos das seguintes funções do 3º grau.

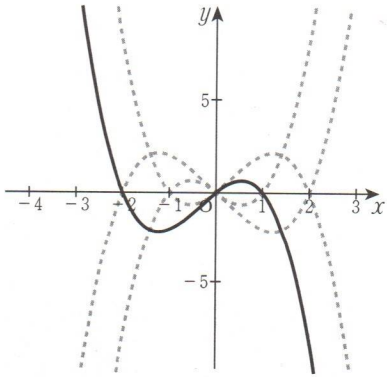
(1) $y = x(x+2)(x-1)$



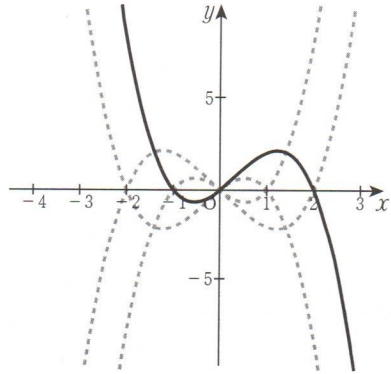
(3) $y = x(x-2)(x+1)$



(2) $y = -x(x+2)(x-1)$



(4) $y = -x(x-2)(x+1)$

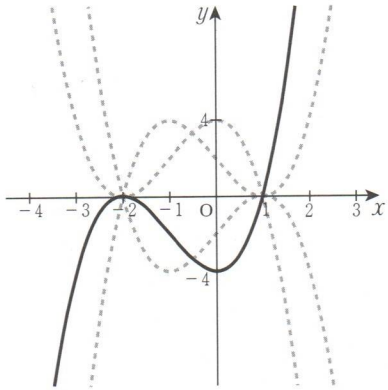


K 102b

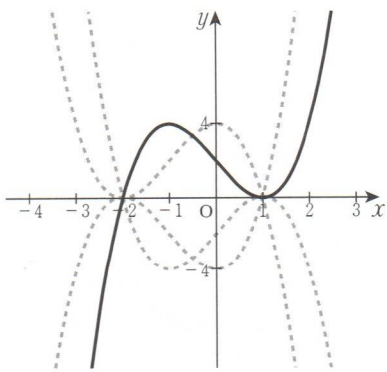
2. Trace os gráficos das seguintes funções do 3º grau.

Ex.

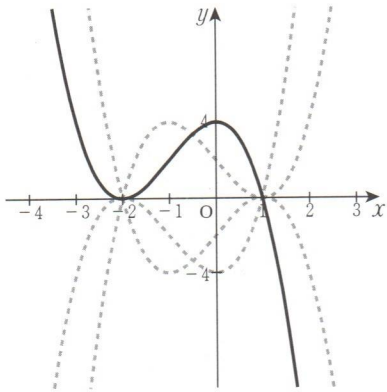
$y=(x+2)^2(x-1)$



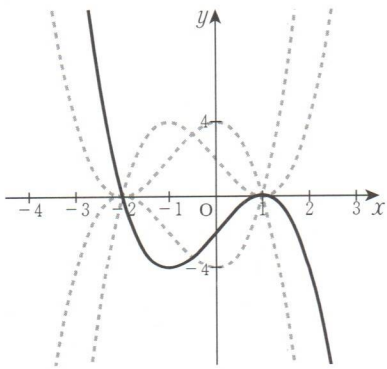
(1) $y=(x+2)(x-1)^2$



(2) $y=-(x+2)^2(x-1)$



(3) $y=-(x+2)(x-1)^2$

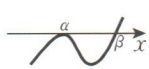


---

alfa *beta* *gama*

- Considere a função do 3º grau $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $(a>0, \alpha<\beta<\gamma)$. Quando $y=0$, $x=\alpha, \beta, \gamma$. O gráfico corta o eixo x em três pontos.

- Considere a função do 3º grau $y=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(a>0, \alpha<\beta)$. Quando $y=0$, $x=\alpha, \beta$. O gráfico tangencia o eixo x em $x=\alpha$ e corta-o em $x=\beta$.

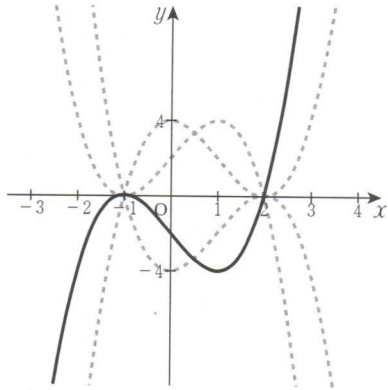


K 103a KUMON Funções de Grau Superior

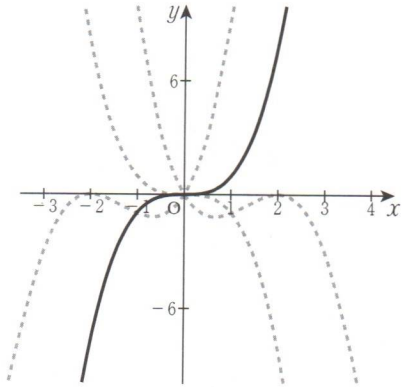
(20 pontos)

1. Trace os gráficos das seguintes funções do 3º grau.

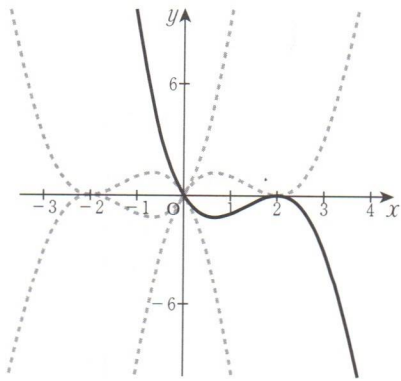
(1) $y=(x+1)^2(x-2)$



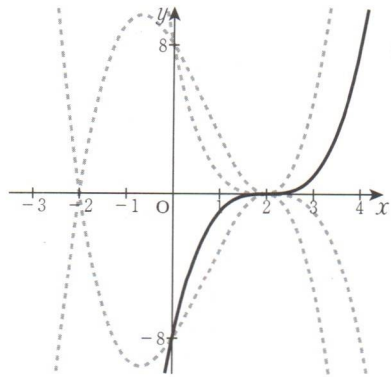
(3) $y=x^3$



(2) $y=-x(x-2)^2$



(4) $y=(x-2)^3$



2. Trace o gráfico da seguinte função do 3º grau.

Ex.

$y = x^3 - 3x - 2$

[Res.] Seja $f(x) = x^3 - 3x - 2$

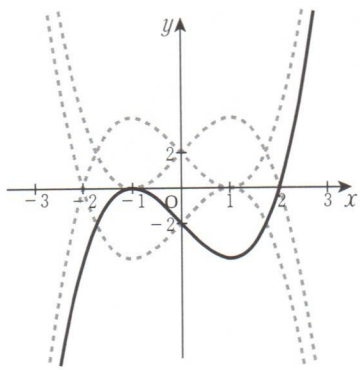
De $f(-1) = 0$,

$$f(x) = (x+1)(x^2 - x - 2)$$
$$= (x+1)^2(x-2)$$

☞ Pelo *Teorema dos Fatores*, $(x+1)$ é um *fator*.

Nota: Se $f(x)$ for dividido por $x+1$ o quociente é $x^2 - x - 2$.
(Veja o *Teorema do Fator* em J172.)

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 3x - 2 & x+1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 - x - 2 \\ \hline -x^2 - 3x & \\ -x^2 - x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$



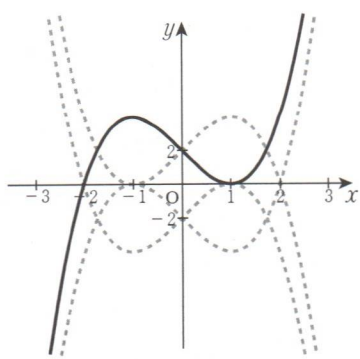
(1) $y = x^3 - 3x + 2$

[Res.] Seja $f(x) = x^3 - 3x + 2$

De $f(1) = 0$,

$$f(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$$
$$= (x-1)^2(x+2)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 3x + 2 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 + x - 2 \\ \hline x^2 - 3x & \\ x^2 - x & \\ \hline -2x + 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$



K 104a KUMON Funções de Grau Superior

(12 pontos)

1. Para cada função do 3º grau, complete os quadros em branco abaixo com as letras (A)～(F) do gráfico correspondente.

(1) $y = x(x+2)(x-3)$ … **(E)**

(2) $y = x(x+3)(x-2)$ … **(B)**

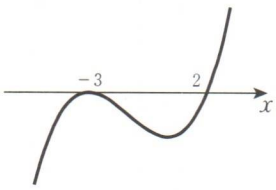
(3) $y = -x(x+3)(x-2)$ … **(D)**

(4) $y = (x+3)(x-2)^2$ … **(F)**

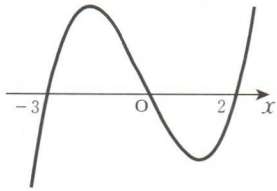
(5) $y = (x-2)(x+3)^2$ … **(A)**

(6) $y = -(x+3)^2(x-2)$ … **(C)**

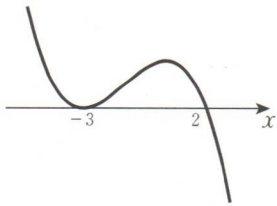
(A)



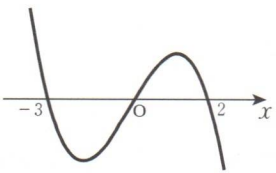
(B)



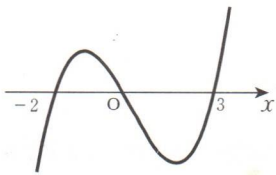
(C)



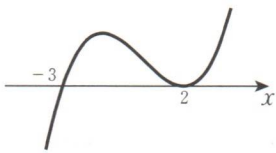
(D)



(E)



(F)



K 104b

2. Para cada uma das duas funções do 3º grau, complete os quadros em branco abaixo com as letras (A)~(F) do gráfico correspondente.

(1) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ ··· **(E)** (2) $y = x^3 + 2x^2 + x$ ··· **(D)**

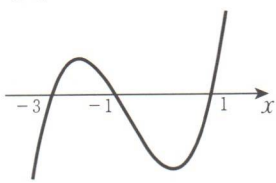
[Res.] Pelo *Teorema do Fator*,

$$y = (x-1)(x^2-2x-3)$$
$$= (x-1)(x-3)(x+1)$$

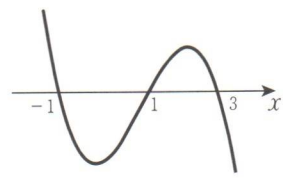
[Res.] $y = x(x^2+2x+1)$

$$= x(x+1)^2$$

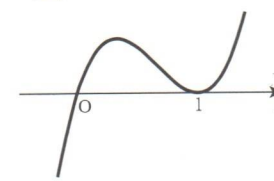
(A)



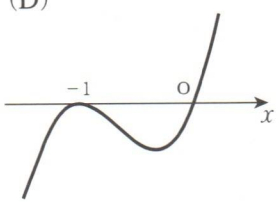
(B)



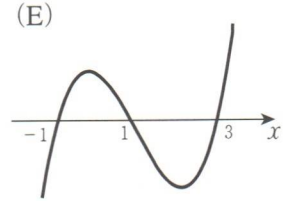
(C)



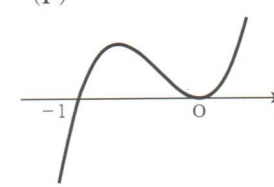
(D)



(E)



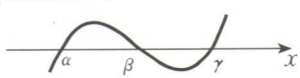
(F)



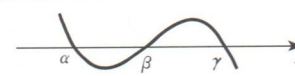
Resumindo

- Os possíveis gráficos para a função do 3º grau $y = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $(\alpha < \beta < \gamma)$ são:

Quando $a > 0$

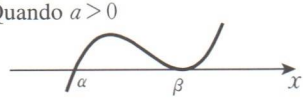


Quando $a < 0$



- Os possíveis gráficos para a função do 3º grau $y = a(x-\alpha)(x-\beta)^2$ $(\alpha < \beta)$ são:

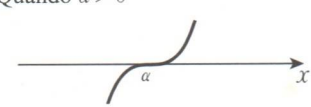
Quando $a > 0$



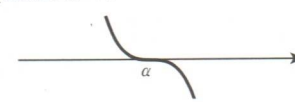
Quando $a < 0$

- Os possíveis gráficos para a função do 3º grau $y = a(x-\alpha)^3$ são:

Quando $a > 0$



Quando $a < 0$



K 105a KUMON Funções de Grau Superior

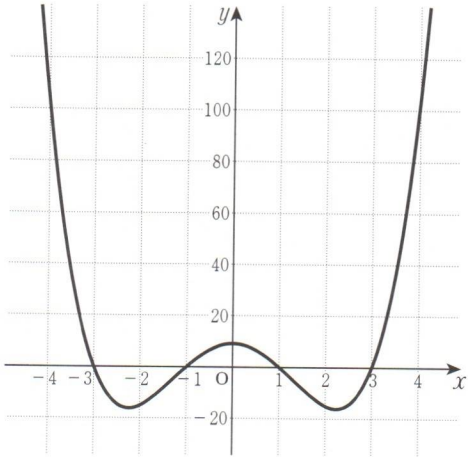
(25 pontos)

1. Construa o gráfico da seguinte ***função do 4º grau***.

Ex.

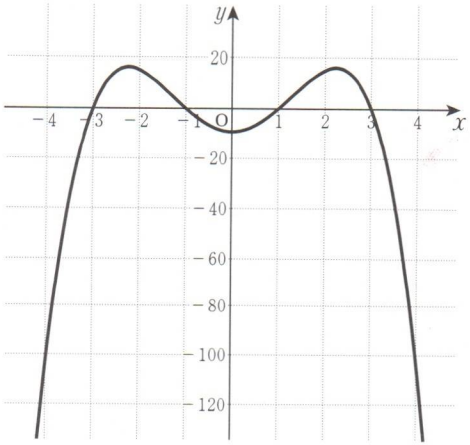
$y=(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)$

x	y
-4	105
-3	0
-2	-15
-1	0
0	9
1	0
2	-15
3	0
4	105



(1) $y=-(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)$

x	y
-4	**-105**
-3	**0**
-2	**15**
-1	**0**
0	**-9**
1	**0**
2	**15**
3	**0**
4	**-105**



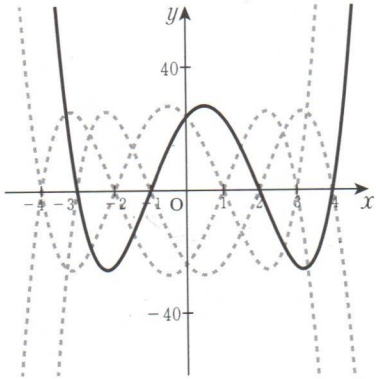
Uma função que pode ser escrita como $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$ é chamada de ***função do 4º grau*** ou ***função biquadrada***. Uma ***função do 4º grau*** é uma função polinomial de grau 4.

K 105b

2. Trace os gráficos das seguintes funções do 4º grau.

Ex.

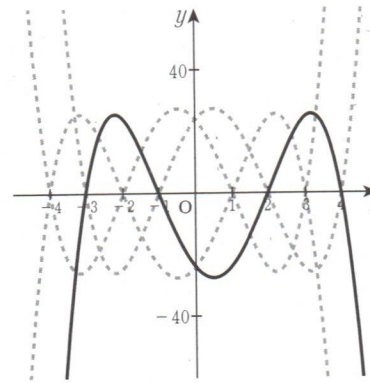
$y=(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$



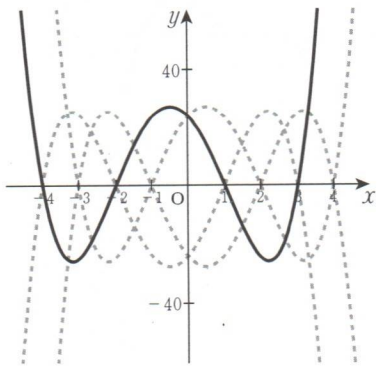
Nota: Se $-3<x<-1$, então $y<0$.

(Por exemplo, se substituirmos $x=-2$, teremos $y=-24<0$.)

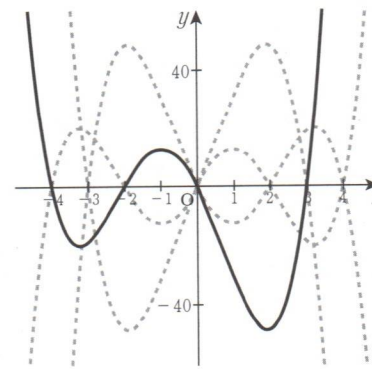
(2) $y=-(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$



(1) $y=(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)$



(3) $y=x(x+4)(x+2)(x-3)$



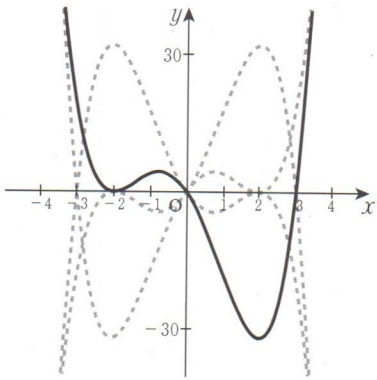
K 106a KUMON Funções de Grau Superior

(14 pontos)

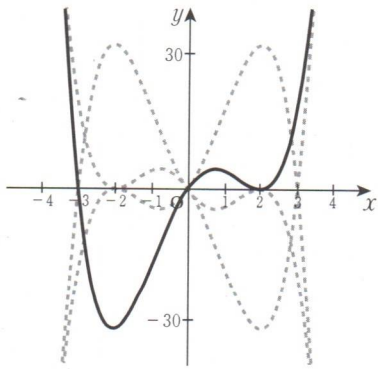
Trace os gráficos das seguintes funções do 4º grau.

Ex.

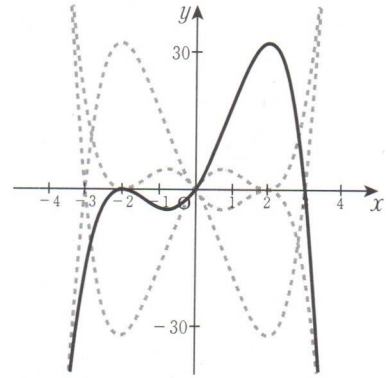
$y = x(x+2)^2(x-3)$



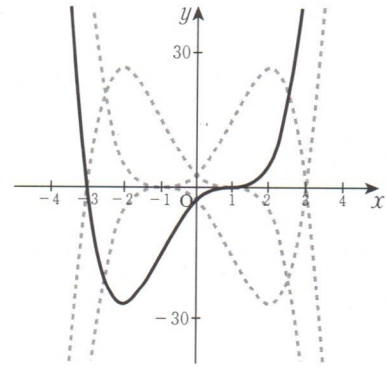
(1) $y = x(x+3)(x-2)^2$



(2) $y = -x(x+2)^2(x-3)$

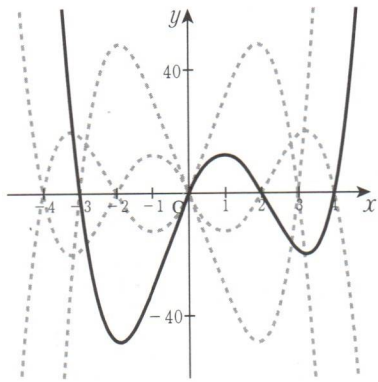


(3)* $y = (x+3)(x-1)^3$

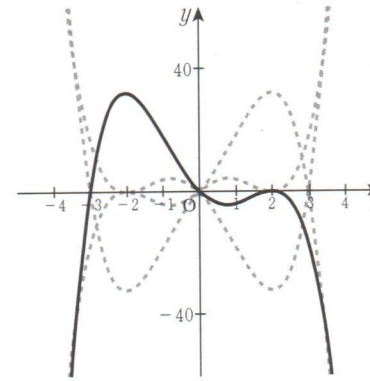


K 106b

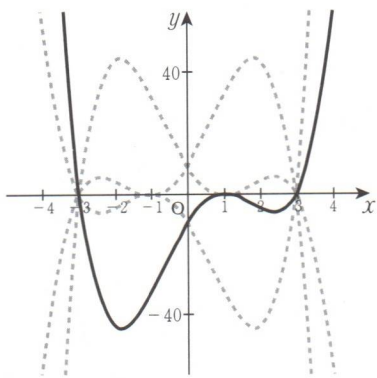
(4) $y = x(x+3)(x-2)(x-4)$



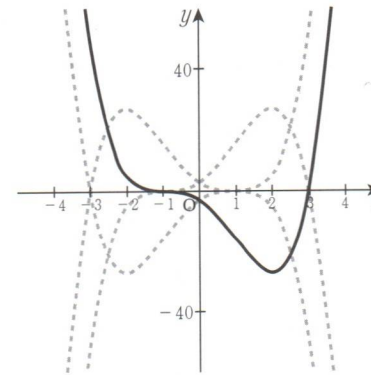
(6) $y = -x(x+3)(x-2)^2$



(5) $y = (x+3)(x-1)^2(x-3)$



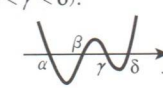
(7) $y = (x+1)^3(x-3)$



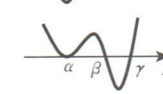
---

alfa *beta* *gama* *delta*

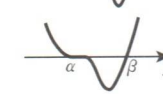
- Considere a função do 4º grau $y = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ $(a>0,\ \alpha<\beta<\gamma<\delta)$.
  Quando $y = 0$, $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$. O gráfico corta o eixo x em quatro pontos.



- Considere a função do 4º grau $y = a(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$ $(a>0,\ \alpha<\beta<\gamma)$.
  Quando $y = 0$, $x = \alpha, \beta, \gamma$. O gráfico tangencia o eixo x em $x = \alpha$ e cruza-o em $x = \beta, \gamma$.



- Considere a função do 4º grau $y = a(x-\alpha)^3(x-\beta)$ $(a>0,\ \alpha<\beta)$.
  Quando $y = 0$, $x = \alpha, \beta$. O gráfico cruza o eixo x em $x = \alpha$ e $x = \beta$.



K 107a KUMON Funções de Grau Superior

(11 pontos)

1. Para cada função do 4º grau, complete os quadros em branco abaixo com as letras (A)~(F) do gráfico correspondente.

(1) $y=(x+4)(x+2)(x-1)(x-4)$ ... **(B)**

(2) $y=(x+3)(x-1)(x-3)^2$ ... **(F)**

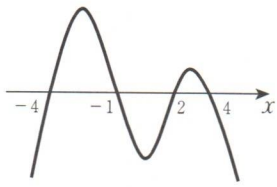
(3) $y=(x+3)(x-1)^2(x-3)$ ... **(D)**

(4) $y=-(x+4)(x+1)(x-2)(x-4)$ ... **(A)**

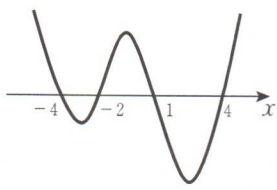
(5) $y=-(x+3)^2(x-1)(x-3)$ ... **(E)**

(6) $y=-(x+3)(x-3)^3$ ... **(C)**

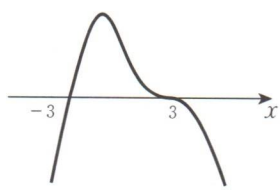
(A)



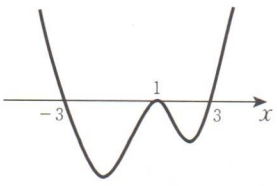
(B)



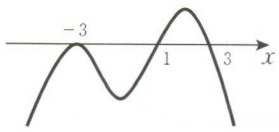
(C)



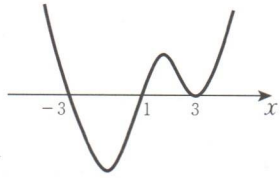
(D)



(E)



(F)



K 107b

2. Para cada uma das duas funções do 4º grau, complete os quadros em branco abaixo com as letras (A)～(D) do gráfico correspondente.

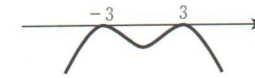
(1) $y=-(x+3)^2(x-3)^2$ … **(B)**

(2) $y=(x+3)^4$ … **(C)**

(3) $y=-(x-3)^4$ … **(D)**

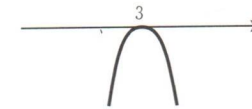
(A)

(B)



(C)

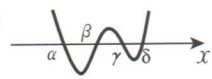
(D)



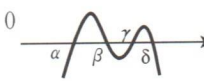
Resumindo

- Os gráficos possíveis para a função do 4º grau $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ $(\alpha<\beta<\gamma<\delta)$ são:

Quando $a>0$

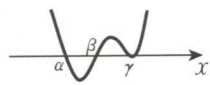


Quando $a<0$

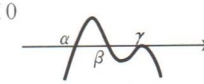


- Os gráficos possíveis para a função do 4º grau $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)^2$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ são:

Quando $a>0$

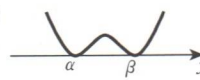


Quando $a<0$



- Os gráficos possíveis para a função do 4º grau $y=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ $(\alpha<\beta)$ são:

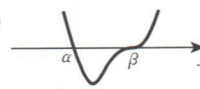
Quando $a>0$



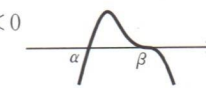
Quando $a<0$

- Os gráficos possíveis para a função do 4º grau $y=a(x-\alpha)(x-\beta)^3$ $(\alpha<\beta)$ são:

Quando $a>0$

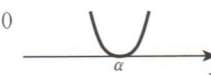


Quando $a<0$

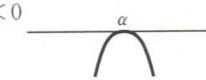


- Os gráficos possíveis para a função do 4º grau $y=a(x-\alpha)^4$ são:

Quando $a>0$



Quando $a<0$



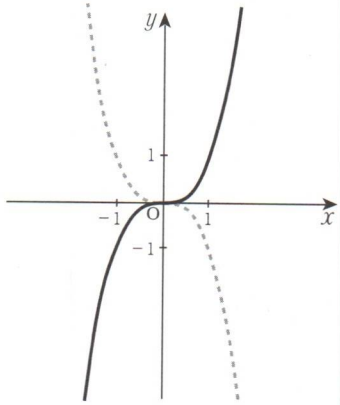
K 108a KUMON Funções de Grau Superior

(12 pontos)

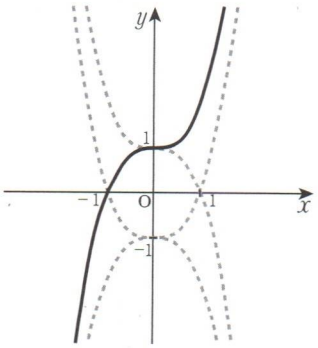
1. Trace os gráficos das seguintes funções do 3º grau.

Ex.

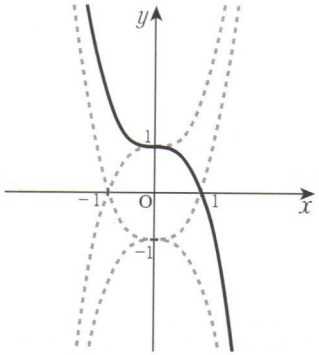
$y = x^3$



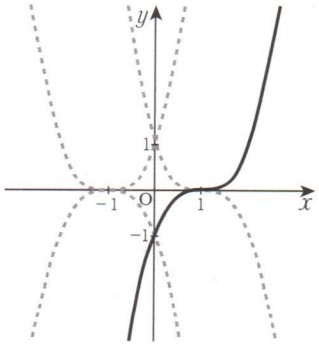
(1) $y = x^3 + 1$



(2) $y = -x^3 + 1$



(3) $y = (x-1)^3$



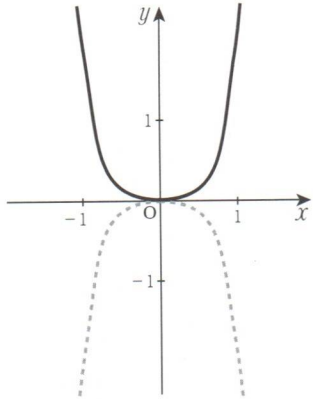
➢ O gráfico de $y = x^3 + 1$ é um deslocamento do gráfico de $y = x^3$, 1 unidade ao longo do eixo y

➢ O gráfico de $y = (x-1)^3$ é um deslocamento do gráfico de $y = x^3$, 1 unidade ao longo do eixo x.

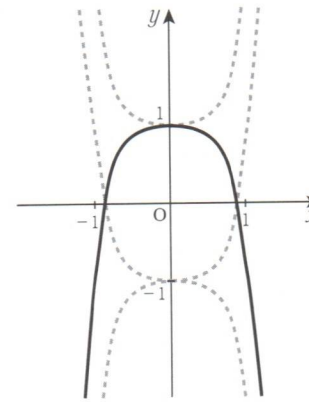
2. Trace os gráficos das seguintes funções do 4º grau.

Ex.

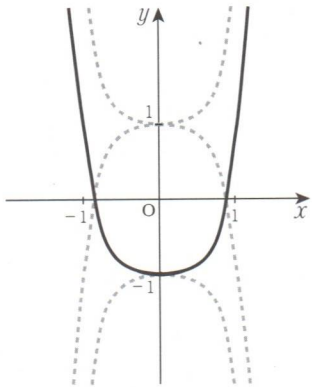
$y = 2x^4$



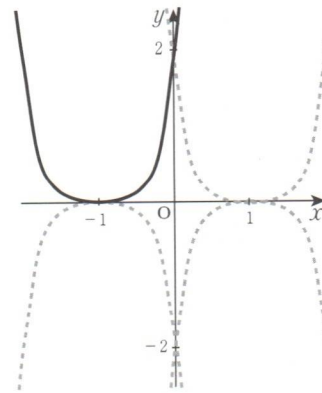
(2) $y = -2x^4 + 1$



(1) $y = 2x^4 - 1$



(3) $y = 2(x+1)^4$



3. Complete os quadros em branco abaixo usando os gráficos acima.

(1) O gráfico de $y = 2x^4 - 1$ é um deslocamento do gráfico de $y = 2x^4$,

−1	unidade(s) ao longo do eixo	*y*

(2) O gráfico de $y = 2(x+1)^4$ é um deslocamento do gráfico de $y = 2x^4$,

−1	unidade(s) ao longo do eixo	*x*

K 109a KUMON Funções de Grau Superior

(6 pontos)

1. Encontre o número de unidades e a direção em que os seguintes gráficos foram deslocados do gráfico de $y = x^3$.

(1) $y = x^3 + 1$ — **1** unidade(s) ao longo do eixo ***y***

(2) $y = x^3 - 2$ — **−2 unidades ao longo do eixo *y***

(3) $y = (x-1)^3$ — **1 unidade ao longo do eixo *x***

(4) $y = (x+2)^3$ — **−2 unidades ao longo do eixo *x***

2. Encontre o número de unidades e a direção em que os seguintes gráficos foram deslocados do gráfico de $y = -2x^4$.

(1) $y = -2x^4 + 3$ — **3 unidades ao longo do eixo *y***

(2) $y = -2x^4 - 1$ — **−1 unidade ao longo do eixo *y***

(3) $y = -2(x-3)^4$ — **3 unidades ao longo do eixo *x***

(4) $y = -2(x+1)^4$ — **−1 unidade ao longo do eixo *x***

K 109b

3. Encontre a equação do gráfico obtido pelo deslocamento do gráfico de $y = -x^3$ em:

(1) 2 unidades ao longo do eixo x $\quad y = -(x - \boxed{2})^3$

(2) 2 unidades ao longo do eixo y $\quad \boldsymbol{y = -x^3 + 2}$

(3) -1 unidade ao longo do eixo y $\quad \boldsymbol{y = -x^3 - 1}$

4. Encontre a equação do gráfico obtido pelo deslocamento do gráfico de $y = 3x^4$ em:

(1) 1 unidade ao longo do eixo x $\quad \boldsymbol{y = 3(x-1)^4}$

(2) -3 unidades ao longo do eixo x $\quad \boldsymbol{y = 3(x+3)^4}$

(3) 1 unidade ao longo do eixo y $\quad \boldsymbol{y = 3x^4 + 1}$

(4) -3 unidades ao longo do eixo y $\quad \boldsymbol{y = 3x^4 - 3}$

Considere isso!

O gráfico de $y = 2(x-1)^3 + 4$ é um deslocamento de $y = 2x^3$.
Pense em como o gráfico foi deslocado.

Resposta: 1 unidade ao longo do eixo x, e 4 unidades ao longo do eixo y

K I I Oa KUMON Funções de Grau Superior

(9 pontos)

1. Associe os gráficos de (A)～(F) abaixo com as funções de (1)～(6) completando os quadros em branco com a letra correspondente

(1) $y=(x+1)(x-1)(x-4)$ … **(E)**

(2) $y=(x+4)(x+1)(x-1)$ … **(A)**

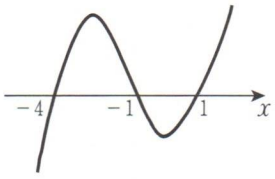
(3) $y=-(x+1)(x-1)(x-4)$ … **(C)**

(4) $y=(x+3)(x+1)(x-1)(x-4)$ … **(B)**

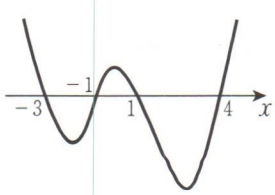
(5) $y=-(x+3)(x+1)^2(x-4)$ … **(D)**

(6) $y=-(x+3)(x+1)(x-4)^2$ … **(F)**

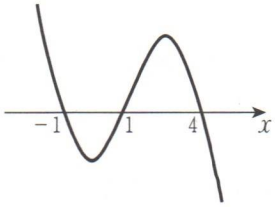
(A)



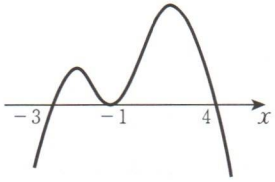
(B)



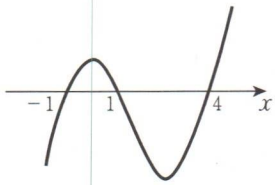
(C)



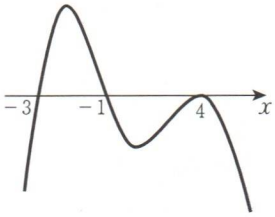
(D)



(E)

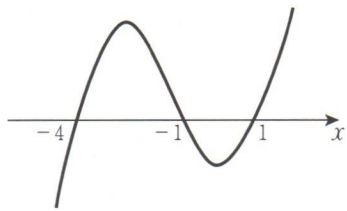


(F)

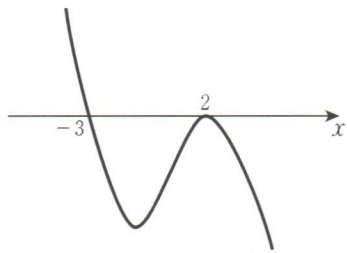


2. Trace os gráficos das seguintes funções.

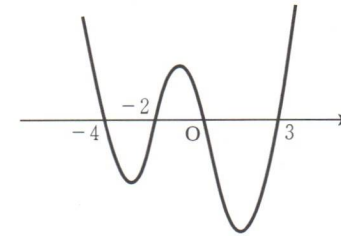
(1) $y=(x+4)(x+1)(x-1)$



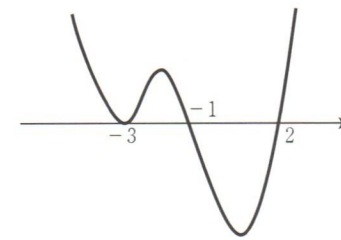
(2) $y=-(x+3)(x-2)^2$



(3) $y=x(x+4)(x+2)(x-3)$



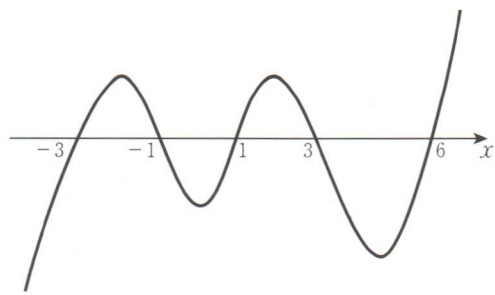
(4) $y=(x+3)^2(x+1)(x-2)$



3. Trace o gráfico da seguinte ***função do 5º grau***.

$y=(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)(x-6)$

Dica



Dica

Se $y=f(x)$, então $f(-4)<0$, $f(-3)=0$, $f(-2)>0$, ..., $f(7)>0$

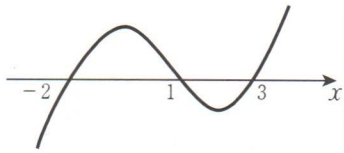
Terminologia: Uma ***função do 5º grau*** é uma função polinomial de grau 5.

(14 pontos)

Para cada função, trace o gráfico e encontre os valores de x para $y = 0$.

Ex.

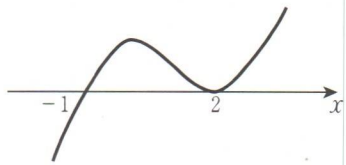
$y = (x+2)(x-1)(x-3)$



$(x+2)(x-1)(x-3) = 0$

$x = -2,\ 1,\ 3$

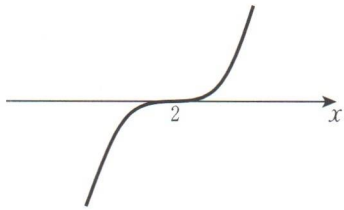
(1) $y = (x+1)(x-2)^2$



$(x+1)(x-2)^2 = 0$

$\boldsymbol{x = -1,\ 2}$

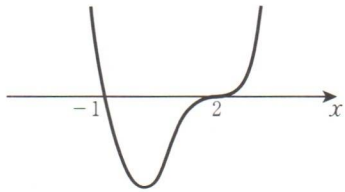
(2) $y = (x-2)^3$



$(x-2)^3 = 0$

$\boldsymbol{x = 2}$

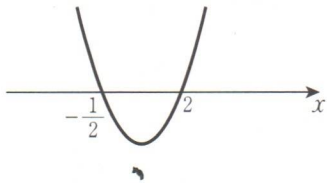
(3) $y = (x+1)(x-2)^3$



$(x+1)(x-2)^3 = 0$

$\boldsymbol{x = -1,\ 2}$

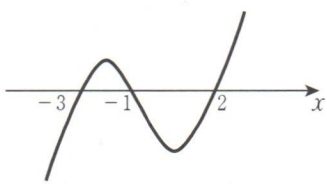
(4) $y=(2x+1)(x-2)$



$(2x+1)(x-2)=0$

$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2},\ 2}$

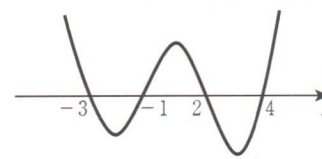
(5) $y=(x+3)(x+1)(x-2)$



$(x+3)(x+1)(x-2)=0$

$\boldsymbol{x=-3,\ -1,\ 2}$

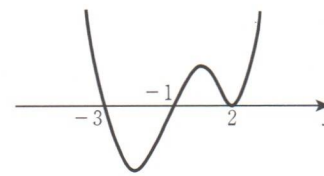
(6) $y=(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$



$(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)=0$

$\boldsymbol{x=-3,\ -1,\ 2,\ 4}$

(7) $y=(x+3)(x+1)(x-2)^2$



$(x+3)(x+1)(x-2)^2=0$

$\boldsymbol{x=-3,\ -1,\ 2}$

As soluções da equação do 2º grau $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ correspondem aos pontos onde a função $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ intercepta o eixo x.

Analogamente, as soluções da equação do 3º grau $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ correspondem aos pontos onde a função $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ intercepta o eixo x.

As soluções da equação do 4º grau $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0$ correspondem aos pontos onde a função $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ intercepta o eixo x.

Equações e Inequações de Grau Superior

(16 pontos)

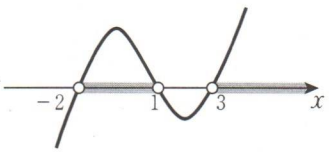
1. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$(x+2)(x-1)(x-3)>0$

[Res.] Traçando

$y=(x+2)(x-1)(x-3)$,



Portanto,

$-2<x<1,\ x>3$

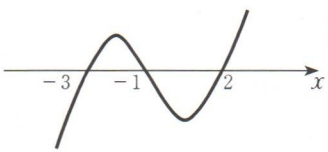
Para os valores de x nas regiões sombreadas y é positivo.

Nota: Por exemplo, substituindo $x=0$, temos $y=6$. Assim, vemos que y é positivo quando $-2<x<1$.

(1) $(x+3)(x+1)(x-2)<0$

[Res.] Traçando

$y=(x+3)(x+1)(x-2)$,



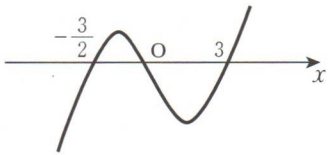
Portanto,

$\boldsymbol{x<-3,\ -1<x<2}$

(2) $x(2x+3)(x-3)>0$

[Res.] Traçando

$y=x(2x+3)(x-3)$,



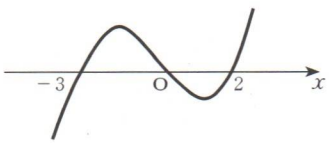
Portanto,

$\boldsymbol{-\frac{3}{2}<x<0,\ x>3}$

(3) $x(x-2)(x+3)<0$

[Res.] Traçando

$y=x(x-2)(x+3)$,



Portanto,

$\boldsymbol{x<-3,\ 0<x<2}$

2. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

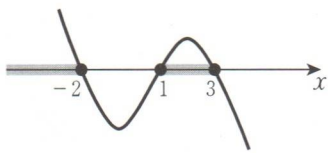
Ex.

$(x+2)(x-1)(3-x) \geq 0$

[Res.] $-(x+2)(x-1)(x-3) \geq 0$

Traçando

$y = -(x+2)(x-1)(x-3)$,



Portanto, $x \leq -2$, $1 \leq x \leq 3$

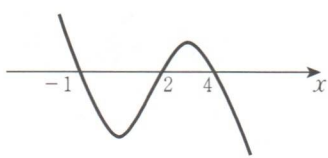
Nota: Por exemplo, substituindo $x = 2$, temos $y = 4$. Assim, vemos que y é positivo quando $1 < x < 3$.

(1) $(x+1)(2-x)(x-4) \leq 0$

[Res.] $-(x+1)(x-2)(x-4) \leq 0$

Traçando

$y = -(x+1)(x-2)(x-4)$,



Portanto,

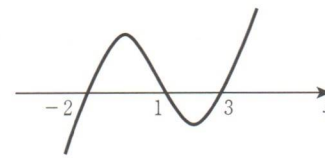
$\boldsymbol{-1 \leq x \leq 2,\ x \geq 4}$

(2) $(x+2)(1-x)(3-x) < 0$

[Res.] $(x+2)(x-1)(x-3) < 0$

Traçando

$y = (x+2)(x-1)(x-3)$,



Portanto,

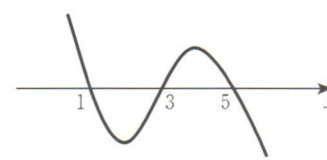
$\boldsymbol{x < -2,\ 1 < x < 3}$

(3) $(1-x)(3-x)(5-x) \geq 0$

[Res.] $-(x-1)(x-3)(x-5) \geq 0$

Traçando

$y = -(x-1)(x-3)(x-5)$,



Portanto,

$\boldsymbol{x \leq 1,\ 3 \leq x \leq 5}$

Equações e Inequações de Grau Superior

(16 pontos)

1. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

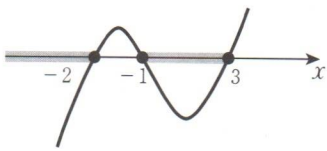
Ex.

$(x+2)(x^2-2x-3) \leq 0$

[Res.] $(x+2)(x-3)(x+1) \leq 0$

Traçando

$y=(x+2)(x-3)(x+1)$,



Portanto,

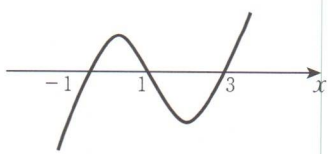
$x \leq -2, \ -1 \leq x \leq 3$

(1) $(x+1)(x^2-4x+3)>0$

[Res.] $(x+1)(x-3)(x-1)>0$

Traçando

$y=(x+1)(x-3)(x-1)$,



Portanto,

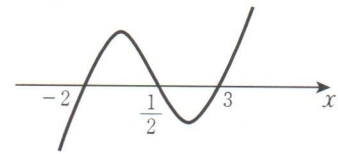
$\boldsymbol{-1<x<1, \ x>3}$

(2) $(2x-1)(x^2-x-6)<0$

[Res.] $(2x-1)(x-3)(x+2)<0$

Traçando

$y=(2x-1)(x-3)(x+2)$,



Portanto,

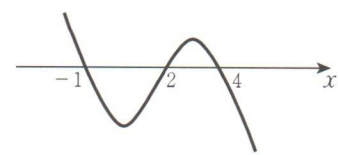
$\boldsymbol{x<-2, \ \frac{1}{2}<x<3}$

(3) $(2-x)(x^2-3x-4) \geq 0$

[Res.] $-(x-2)(x-4)(x+1) \geq 0$

Traçando

$y=-(x-2)(x-4)(x+1)$,



Portanto,

$\boldsymbol{x \leq -1, \ 2 \leq x \leq 4}$

2. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$(x-1)(x^2-4x+2)>0$

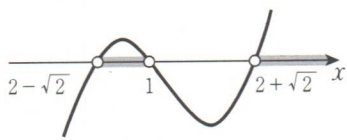
[Res.] Resolvendo a equação

$x^2-4x+2=0$,

$x=2\pm\sqrt{2}$

Traçando

$y=(x-1)(x^2-4x+2)$,



Portanto,

$2-\sqrt{2}<x<1,\ x>2+\sqrt{2}$

(1) $(x+1)(x^2+2x-2)\leq 0$

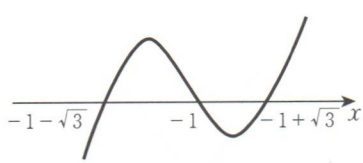
[Res.] Resolvendo a equação

$x^2+2x-2=0$,

$x=-1\pm\sqrt{3}$

Traçando

$y=(x+1)(x^2+2x-2)$,



Portanto,

$\boldsymbol{x\leq -1-\sqrt{3},\ -1\leq x\leq -1+\sqrt{3}}$

(2) $(3-x)(x^2-2x-1)>0$

[Res.] $-(x-3)(x^2-2x-1)>0$

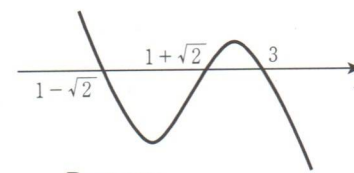
Resolvendo a equação

$x^2-2x-1=0$,

$x=1\pm\sqrt{2}$

Traçando

$y=-(x-3)(x^2-2x-1)$,



Portanto,

$\boldsymbol{x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x<3}$

(3) $(x-2)(x^2-3x+1)\geq 0$

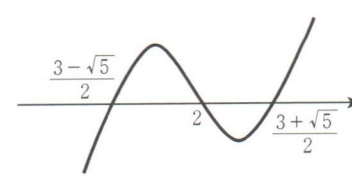
[Res.] Resolvendo a equação

$x^2-3x+1=0$,

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Traçando

$y=(x-2)(x^2-3x+1)$,



[**Nota:** $\sqrt{5}\cong 2,23\ldots$]

Portanto,

$\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq 2,\ x\geq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$

Equações e Inequações de Grau Superior

(16 pontos)

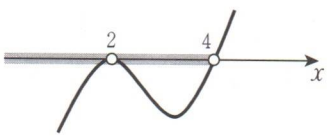
1. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$(x-2)^2(x-4)<0$

[Res.] Traçando

$y=(x-2)^2(x-4)$,



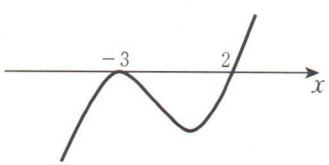
Portanto,

$x<2,\ 2<x<4$ ☜ $x=2$ não está incluído na resposta.

(1) $(x+3)^2(x-2)<0$

[Res.] Traçando

$y=(x+3)^2(x-2)$,



Portanto,

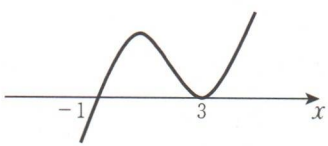
$\boldsymbol{x<-3,\ -3<x<2}$

(2) $(x+1)(x^2-6x+9)<0$

[Res.] $(x+1)(x-3)^2<0$

Traçando

$y=(x+1)(x-3)^2$,



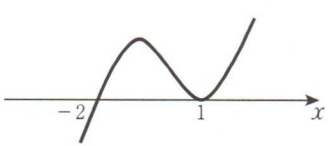
Portanto, $x<$ **−1**

(3) $(x-1)(x^2+x-2)<0$

[Res.] $(x-1)^2(x+2)<0$

Traçando

$y=(x-1)^2(x+2)$,



Portanto, $\boldsymbol{x<-2}$

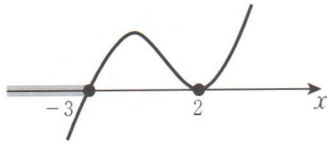
2. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$(x+3)(x-2)^2 \leq 0$

[Res.] Traçando

$y=(x+3)(x-2)^2$,

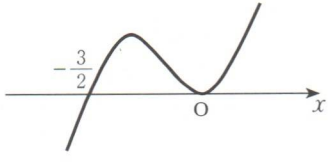


Portanto,

$x \leqslant -3,\ x=2$ ☜ $x=2$ está incluído na resposta.

(1) $x^2(2x+3) \leq 0$

[Res.] Traçando $y=x^2(2x+3)$,



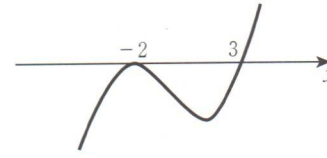
Portanto, $\boldsymbol{x \leq -\frac{3}{2},\ x=0}$

(2) $(x+2)(x^2-x-6) \leq 0$

[Res.] $(x+2)^2(x-3) \leq 0$

Traçando

$y=(x+2)^2(x-3)$,



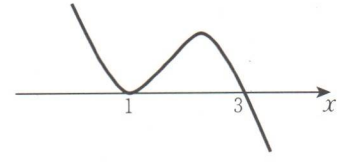
Portanto, $x \leq$ 3

(3) $(1-x)(x^2-4x+3) \geq 0$

[Res.] $-(x-1)^2(x-3) \geq 0$

Traçando

$y=-(x-1)^2(x-3)$,



Portanto, $\boldsymbol{x \leq 3}$

Equações e Inequações de Grau Superior

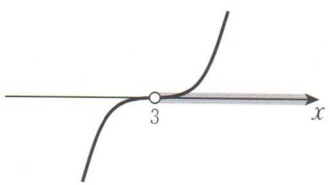
(16 pontos)

1. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$(x-3)^3>0$

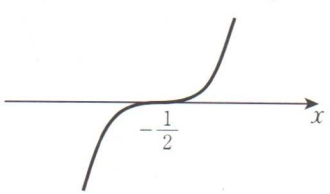
[Res.] Traçando $y=(x-3)^3$,



Portanto, $x>3$

(1) $(2x+1)^3>0$

[Res.] Traçando $y=(2x+1)^3$,

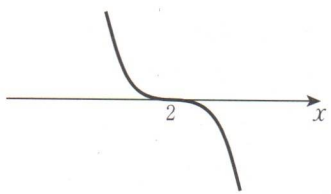


Portanto, $\boldsymbol{x>-\frac{1}{2}}$

(2) $(2-x)^3<0$

[Res.] $-(x-2)^3<0$

Traçando $y=-(x-2)^3$,

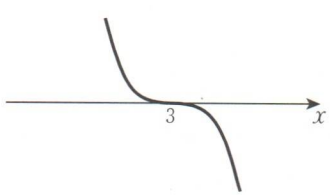


Portanto, $\boldsymbol{x>2}$

(3) $(3-x)(x^2-6x+9)\geq 0$

[Res.] $-(x-3)^3\geq 0$

Traçando $y=-(x-3)^3$,



Portanto, $\boldsymbol{x\leq 3}$

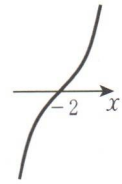
2. Resolva as seguintes inequações.

Ex.

$(x+2)(x^2+3x+5)>0$

[Res.] Seja D o discriminante da equação $x^2+3x+5=0$.
Como $D=9-20=-11<0$, então $x^2+3x+5>0$ para todos os valores de x.
Portanto, $x+2>0$ ☜ Uma vez que x^2+3x+5 é sempre positivo.
Assim, $x>-2$

[Referência]
O gráfico está traçado a direita.



(1) $(2x+1)(x^2-x+2)\leq 0$

[Res.] Seja D o discriminante da equação $x^2-x+2=0$.
Como $D=1-8=-7<0$, então $x^2-x+2>0$ para todos os valores de x.
Portanto, $2x+1\leq 0$
Assim, $\boldsymbol{x \leq -\frac{1}{2}}$

(2) $(1-2x)(x^2-2x+3)\geq 0$

[Res.] $-(2x-1)(x^2-2x+3)\geq 0$
Seja D o discriminante da equação $x^2-2x+3=0$.
Como $\frac{D}{4}=1-3=-2<0$, então $x^2-2x+3>0$ para todos os valores de x.
Portanto, $-(2x-1)\geq 0$
Assim, $\boldsymbol{x \leq \frac{1}{2}}$

(3) $x^3-x^2+x-1\geq 0$

[Res.] $(x-1)(x^2+1)\geq 0$
$x^2+1>0$ para todos os valores de x.
Portanto, $x-1\geq 0$
Assim, $\boldsymbol{x \geq 1}$

Equações e Inequações de Grau Superior

(16 pontos)

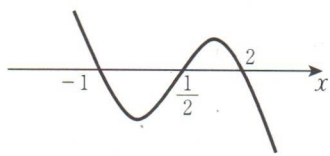
Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

(1) $(1-2x)(x^2-x-2) \leq 0$

[Res.] $-(2x-1)(x-2)(x+1) \leq 0$

Traçando

$y = -(2x-1)(x-2)(x+1)$,



Portanto,

$$\boldsymbol{-1 \leq x \leq \frac{1}{2},\ x \geq 2}$$

(2) $(x-2)(x^2-4x-1) \geq 0$

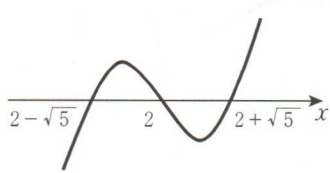
[Res.] Resolvendo a equação

$x^2-4x-1=0$,

$x = 2 \pm \sqrt{5}$

Traçando

$y = (x-2)(x^2-4x-1)$,



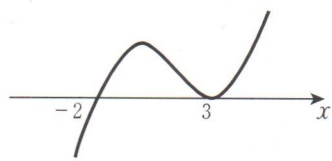
Portanto,

$$\boldsymbol{2-\sqrt{5} \leq x \leq 2,\ x \geq 2+\sqrt{5}}$$

(3) $(x-3)(x^2-x-6) > 0$

[Res.] $(x-3)^2(x+2) > 0$

Traçando $y = (x-3)^2(x+2)$,

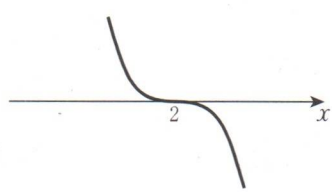


Portanto, $\boldsymbol{-2 < x < 3,\ x > 3}$

(4) $(2-x)(x^2-4x+4) > 0$

[Res.] $-(x-2)^3 > 0$

Traçando $y = -(x-2)^3$,



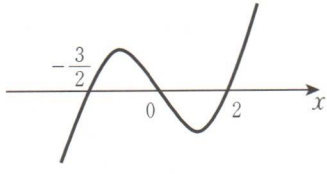
Portanto, $\boldsymbol{x < 2}$

(5) $2x^3-x^2-6x<0$

[Res.] $x(2x+3)(x-2)<0$

Traçando

$y=x(2x+3)(x-2)$,



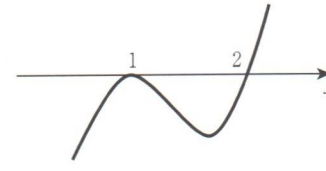
Portanto,

$$x<-\frac{3}{2},\ 0<x<2$$

(6) $x^3-4x^2+5x-2\leq 0$

[Res.] $(x-1)^2(x-2)\leq 0$

Traçando $y=(x-1)^2(x-2)$,

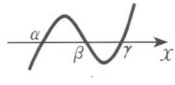


Portanto, $x\leq 2$

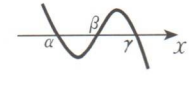
Resumindo

- Resolvendo a inequação $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ $(\alpha<\beta<\gamma)$,

Quando $a>0$: $\alpha<x<\beta$, $x>\gamma$

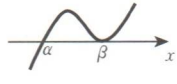


Quando $a<0$: $x<\alpha$, $\beta<x<\gamma$

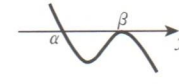


- Resolvendo a inequação $a(x-\alpha)(x-\beta)^2>0$ $(\alpha<\beta)$,

Quando $a>0$: $\alpha<x<\beta$, $x>\beta$

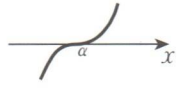


Quando $a<0$: $x<\alpha$

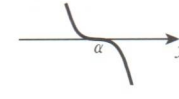


- Resolvendo a inequação $a(x-\alpha)^3>0$,

Quando $a>0$: $x>\alpha$



Quando $a<0$: $x<\alpha$



Equações e Inequações de Grau Superior

(16 pontos)

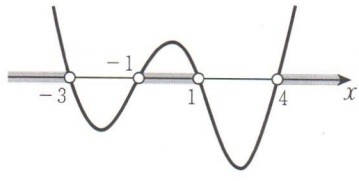
1. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$(x+3)(x+1)(x-1)(x-4)>0$

[Res.] Traçando

$y=(x+3)(x+1)(x-1)(x-4)$,



Portanto,

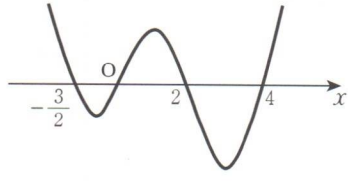
$x<-3,\ -1<x<1,\ x>4$

Nota: Por exemplo, quando substituímos $x=0$, obtemos $y=12$. Assim, vemos que y é positivo para $-1<x<1$.

(1) $x(2x+3)(x-2)(x-4)<0$

[Res.] Traçando

$y=x(2x+3)(x-2)(x-4)$,



Portanto,

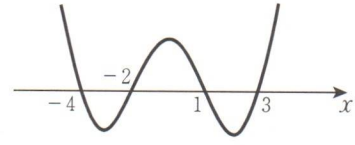
$$-\frac{3}{2}<x<0,\ 2<x<4$$

(2) $(x+4)(x-3)(x^2+x-2)\leq 0$

[Res.] $(x+4)(x-3)(x+2)(x-1)\leq 0$

Traçando

$y=(x+4)(x-3)(x+2)(x-1)$,



Portanto,

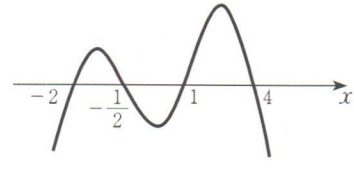
$$-4\leq x\leq -2,\ 1\leq x\leq 3$$

(3) $(2x+1)(1-x)(x^2-2x-8)\leq 0$

[Res.] $-(2x+1)(x-1)(x-4)(x+2)\leq 0$

Traçando

$y=-(2x+1)(x-1)(x-4)(x+2)$,



Portanto,

$$x\leq -2,\ -\frac{1}{2}\leq x\leq 1,\ x\geq 4$$

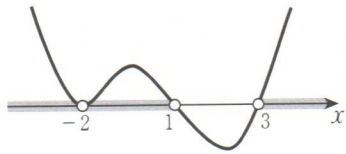
2. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$(x+2)^2(x-1)(x-3)>0$

[Res.] Traçando

$y=(x+2)^2(x-1)(x-3)$,



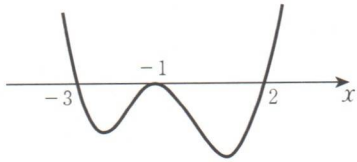
Portanto,

$x<-2,\ -2<x<1,\ x>3$

(1) $(x+3)(x+1)^2(x-2)<0$

[Res.] Traçando

$y=(x+3)(x+1)^2(x-2)$,



Portanto,

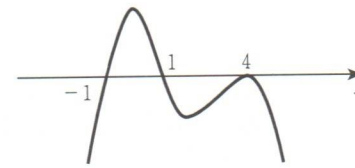
$\boldsymbol{-3<x<-1,\ -1<x<2}$

(2) $(x+1)(1-x)(x-4)^2\geq 0$

[Res.] $-(x+1)(x-1)(x-4)^2\geq 0$

Traçando

$y=-(x+1)(x-1)(x-4)^2$,



Portanto,

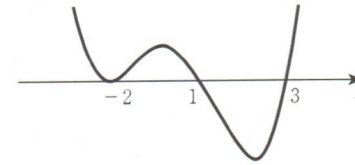
$\boldsymbol{-1\leq x\leq 1,\ x=4}$

(3) $(x+2)(x-3)(x^2+x-2)\geq 0$

[Res.] $(x+2)^2(x-3)(x-1)\geq 0$

Traçando

$y=(x+2)^2(x-3)(x-1)$,



Portanto, $\boldsymbol{x\leq 1,\ x\geq 3}$

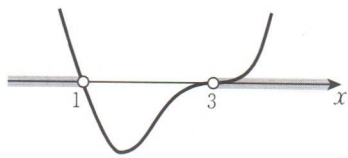
(16 pontos)

1. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$(x-1)(x-3)^3>0$

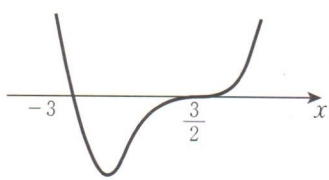
[Res.] Traçando $y=(x-1)(x-3)^3$,



Portanto, $x<1$, $x>3$

(1) $(x+3)(2x-3)^3<0$

[Res.] Traçando $y=(x+3)(2x-3)^3$,

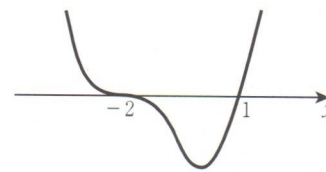


Portanto, $\boldsymbol{-3<x<\frac{3}{2}}$

(2) $(x^2+4x+4)(x^2+x-2)\geq 0$

[Res.] $(x+2)^3(x-1)\geq 0$

Traçando $y=(x+2)^3(x-1)$,

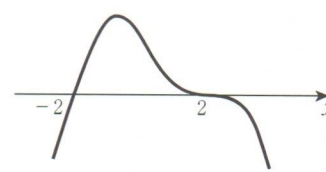


Portanto, $\boldsymbol{x\leq -2,\ x\geq 1}$

(3) $(2-x)(x^3-2x^2-4x+8)\geq 0$

[Res.] $-(x-2)^3(x+2)\geq 0$

Traçando $y=-(x-2)^3(x+2)$,



Portanto, $\boldsymbol{-2\leq x\leq 2}$

2. Resolva as seguintes inequações.

Ex.

$(x+2)(x-1)(x^2+3x+3)<0$

[Res.]

Calculando o discriminante, D, de $x^2+3x+3=0$,

$D=9-12=-3<0$.

Então $x^2+3x+3>0$ para todos os valores de x.

Portanto,

$(x+2)(x-1)<0$ ☜ Uma vez que x^2+3x+3 é sempre positivo.

Assim, $-2<x<1$

(1) $(x+2)(2x+3)(x^2-3x+4)\geq 0$

[Res.] Calculando o discriminante, D, de $x^2-3x+4=0$,

$D=9-16=-7<0$.

Então $x^2-3x+4>0$ para todos os valores de x.

Portanto,

$(x+2)(2x+3)\geq 0$

Assim, $\boldsymbol{x\leq -2,\ x\geq -\frac{3}{2}}$

(2) $(x^2-x+2)(x^2-x-6)<0$

[Res.] $(x^2-x+2)(x-3)(x+2)<0$

Calculando o discriminante, D, de $x^2-x+2=0$,

$D=1-8=-7<0$.

Então $x^2-x+2>0$ para todos os valores de x.

Portanto,

$(x-3)(x+2)<0$

Assim, $\boldsymbol{-2<x<3}$

(3) $(2-3x)(x^3+4x)\leq 0$

[Res.] $-x(3x-2)(x^2+4)\leq 0$

$x^2+4>0$ para todos os valores de x.

Portanto,

$-x(3x-2)\leq 0$

Assim, $\boldsymbol{x\leq 0,\ x\geq \frac{2}{3}}$

Equações e Inequações de Grau Superior

(16 pontos)

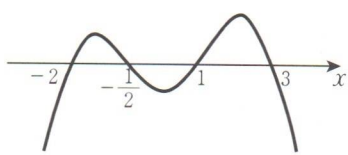
1. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

(1) $(2x+1)(1-x)(x^2-x-6)<0$

[Res.] $-(2x+1)(x-1)(x-3)(x+2)<0$

Traçando

$y=-(2x+1)(x-1)(x-3)(x+2)$,



Portanto,

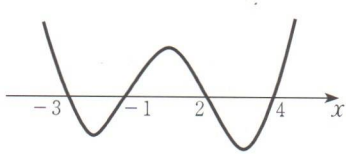
$\boldsymbol{x<-2,\ -\frac{1}{2}<x<1,\ x>3}$

(2) $(x^2-3x-4)(x^2+x-6)>0$

[Res.] $(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)>0$

Traçando

$y=(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)$,



Portanto,

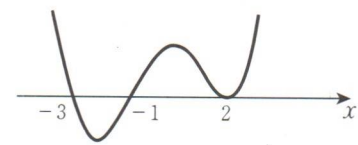
$\boldsymbol{x<-3,\ -1<x<2,\ x>4}$

(3) $(x^2-x-2)(x^2+x-6)>0$

[Res.] $(x-2)^2(x+1)(x+3)>0$

Traçando

$y=(x-2)^2(x+1)(x+3)$,



Portanto,

$\boldsymbol{x<-3,}$

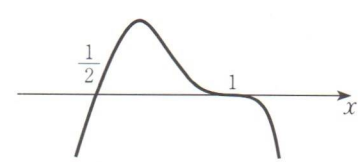
$\boldsymbol{-1<x<2,\ x>2}$

(4) $(1-2x)(x^3-3x^2+3x-1)\leq 0$

[Res.] $-(2x-1)(x-1)^3\leq 0$

Traçando

$y=-(2x-1)(x-1)^3$,



Portanto,

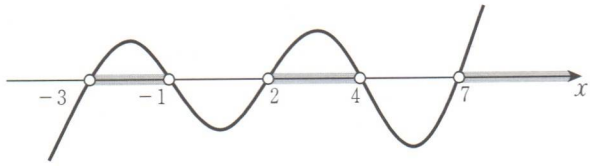
$\boldsymbol{x\leq\frac{1}{2},\ x\geq 1}$

2. Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)(x-7)>0$

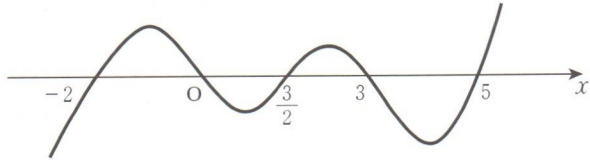
Traçando $y=(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)(x-7)$,



Portanto, $-3<x<-1,\ 2<x<4,\ x>7$

(1) $x(x+2)(2x-3)(x-3)(x-5)<0$

[Res.] Traçando $y=x(x+2)(2x-3)(x-3)(x-5)$,

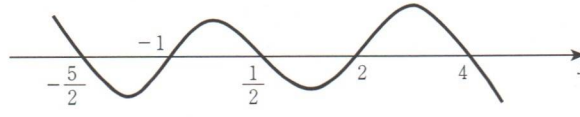


Portanto, $\boldsymbol{x<-2,\ 0<x<\frac{3}{2},\ 3<x<5}$

(2) $(x+1)(2x+5)(1-2x)(x-2)(x-4)\geq 0$

[Res.] $-(x+1)(2x+5)(2x-1)(x-2)(x-4)\geq 0$

Traçando $y=-(x+1)(2x+5)(2x-1)(x-2)(x-4)$,



Portanto, $\boldsymbol{x\leq-\frac{5}{2},\ -1\leq x\leq\frac{1}{2},\ 2\leq x\leq 4}$

Equações e Inequações de Grau Superior

(14 pontos)

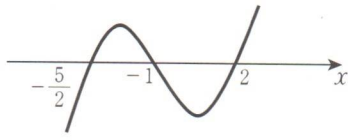
Resolva as seguintes inequações.

(1) $(2x+5)(x^2-x-2)<0$

[Res.] $(2x+5)(x-2)(x+1)<0$

Traçando

$y=(2x+5)(x-2)(x+1)$,



Portanto,

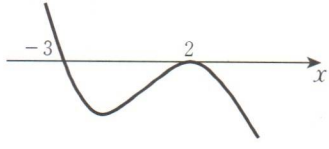
$\boldsymbol{x<-\frac{5}{2},\ -1<x<2}$

(2) $(2-x)(x^2+x-6)\geq 0$

[Res.] $-(x-2)^2(x+3)\geq 0$

Traçando

$y=-(x-2)^2(x+3)$,



Portanto,

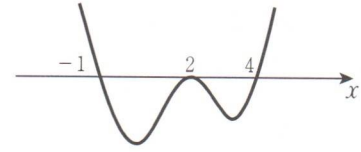
$\boldsymbol{x\leq -3,\ x=2}$

(3) $(x^2-x-2)(x^2-6x+8)<0$

[Res.] $(x-2)^2(x+1)(x-4)<0$

Traçando

$y=(x-2)^2(x+1)(x-4)$,



Portanto,

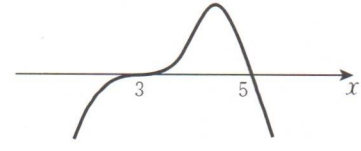
$\boldsymbol{-1<x<2,\ 2<x<4}$

(4) $(3-x)(x-5)(x^2-6x+9)\leq 0$

[Res.] $-(x-3)^3(x-5)\leq 0$

Traçando

$y=-(x-3)^3(x-5)$,



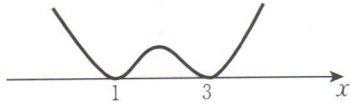
Portanto,

$\boldsymbol{x\leq 3,\ x\geq 5}$

(5) $(x^2-4x+3)^2>0$

[Res.] $(x-1)^2(x-3)^2>0$

Traçando $y=(x-1)^2(x-3)^2$,



Portanto,

$\boldsymbol{x<1,\ 1<x<3,\ x>3}$

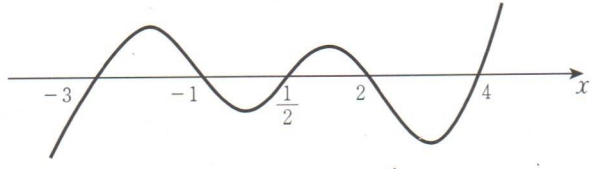
$\boldsymbol{(x\neq 1,\ x\neq 3)}$

(6) $(2x-1)(x^2-3x-4)(x^2+x-6)\leq 0$

[Res.] $(2x-1)(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)\leq 0$

Traçando

$y=(2x-1)(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)$,



Portanto, $\boldsymbol{x\leq -3,\ -1\leq x\leq \frac{1}{2},\ 2\leq x\leq 4}$

(7) $(x^2+x-6)(x^2+x+6)\leq 0$

[Res.] $(x+3)(x-2)(x^2+x+6)\leq 0$

Calculando o discriminante,

D, de $x^2+x+6=0$,

$D=1-24=-23<0$.

Então $x^2+x+6>0$ para todos os valores de x.

Portanto,

$(x+3)(x-2)\leq 0$

Assim, $\boldsymbol{-3\leq x\leq 2}$

Considere isso!

$-x(x-1)(x-2)>0$ ···①

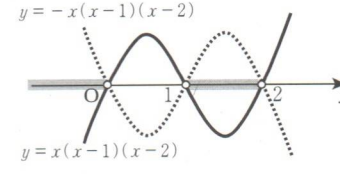
Podemos resolver ① da seguinte forma:

Multiplicando ambos os lados por -1,

$x(x-1)(x-2)<0$ ☜ Note o sentido do sinal da inequação.

Do gráfico de $y=x(x-1)(x-2)$,

$x<$ **0** , **1** $<x<$ **2**



Respostas: em ordem 0, 1, 2

K I 2 I a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

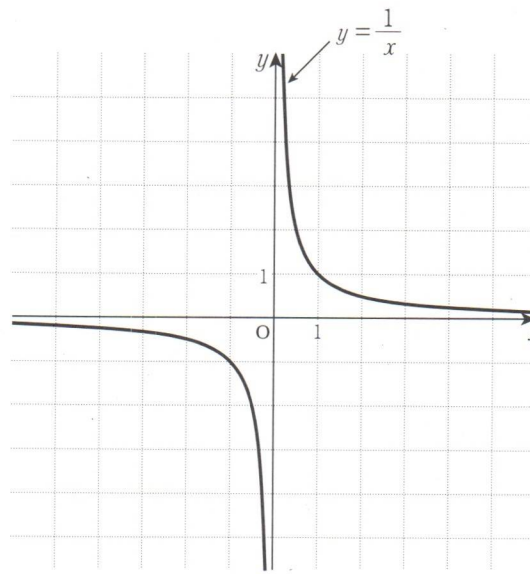
(33 pontos)

Construa os gráficos das seguintes funções.

Ex.

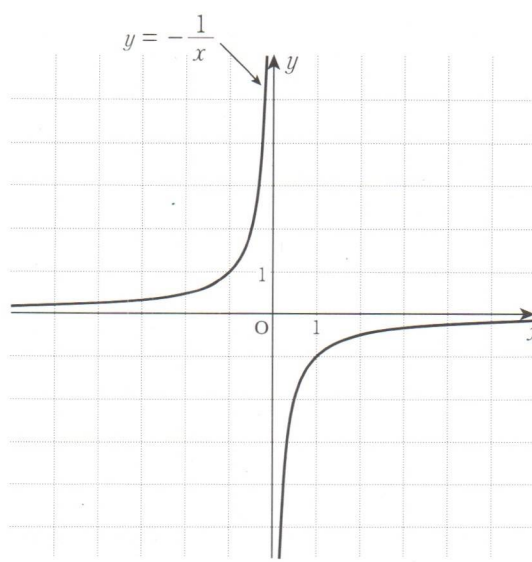
$y = \dfrac{1}{x}$

x	y
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{3}$	-3
0	
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$



(1) $y = -\dfrac{1}{x}$

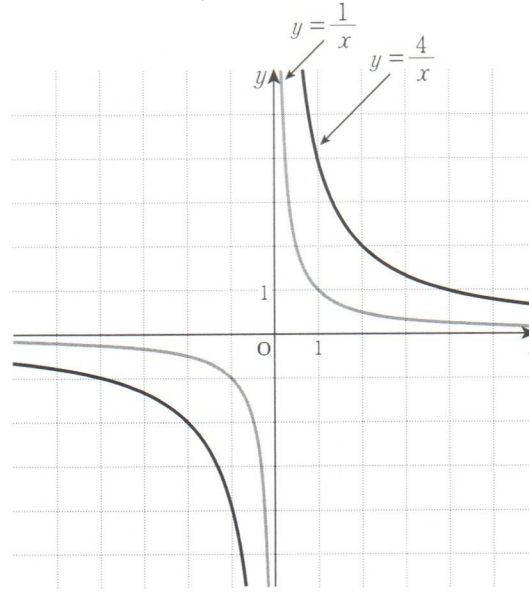
x	y
-3	$\frac{1}{3}$
-2	$\frac{1}{2}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	2
$-\frac{1}{3}$	3
0	
$\frac{1}{3}$	-3
$\frac{1}{2}$	-2
1	-1
2	$-\frac{1}{2}$
3	$-\frac{1}{3}$



K121b

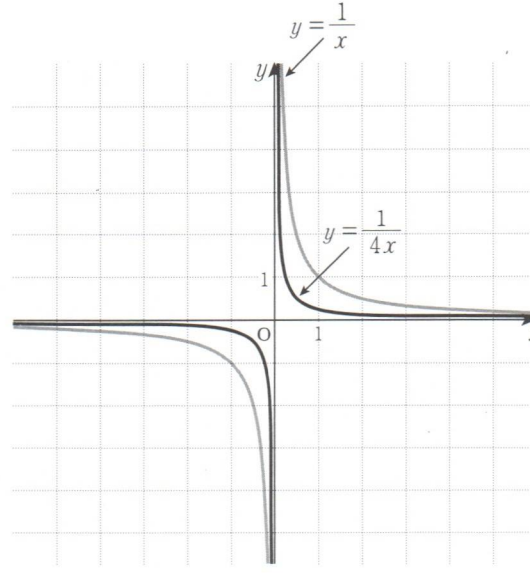
(2) $y=\frac{4}{x}$

x	y
-5	$\boldsymbol{-\frac{4}{5}}$
-4	$\boldsymbol{-1}$
-3	$\boldsymbol{-\frac{4}{3}}$
-2	$\boldsymbol{-2}$
-1	$\boldsymbol{-4}$
0	
1	$\boldsymbol{4}$
2	$\boldsymbol{2}$
3	$\boldsymbol{\frac{4}{3}}$
4	$\boldsymbol{1}$
5	$\boldsymbol{\frac{4}{5}}$



(3) $y=\frac{1}{4x}$

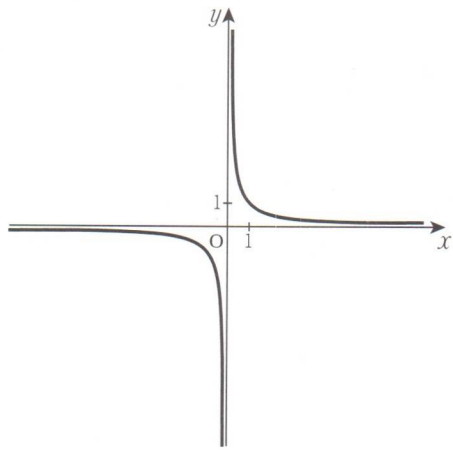
x	y
-3	$-\frac{1}{12}$
-2	$-\frac{1}{8}$
-1	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{4}$	-1
0	
$\frac{1}{4}$	$\boldsymbol{1}$
$\frac{1}{2}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$
1	$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$
2	$\boldsymbol{\frac{1}{8}}$
3	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$



K I 22a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

(8 pontos)

1. Complete os quadros em branco a seguir, usando o gráfico de $y = \frac{1}{x}$.



Encontre os valores de y para cada um dos seguintes valores de x.

Quando $x = 10$, $y =$ $\boxed{\frac{1}{10}}$

Quando $x = 1$, $y =$ $\boxed{1}$

Quando $x = 100$, $y =$ $\boxed{\frac{1}{100}}$

Quando $x = \frac{1}{10}$, $y =$ $\boxed{10}$

Quando $x = 1000$, $y =$ $\boxed{\frac{1}{1000}}$

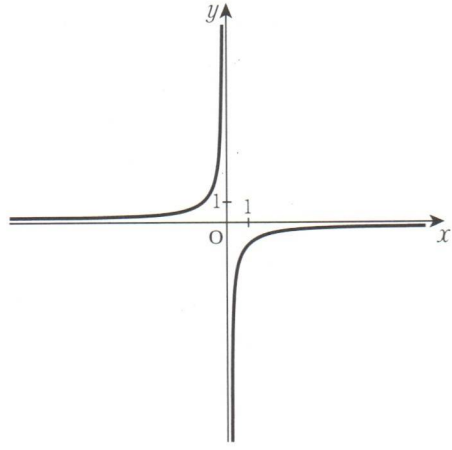
Quando $x = \frac{1}{100}$, $y =$ $\boxed{100}$

⋮ ⋮

Do gráfico de $y = \frac{1}{x}$,

- Quanto mais x se distancia de zero, mais o gráfico se aproxima do eixo x. No entanto, ele nunca cruza o eixo x.
- Quanto mais x se aproxima de zero, mais o gráfico se aproxima do eixo y. No entanto, ele nunca cruza o eixo y.

2. Complete os quadros em branco a seguir, usando o gráfico de $y = -\frac{1}{x}$.



Encontre os valores de y para cada um dos seguintes valores de x.

Quando $x = 10$, $y =$ $\boxed{-\frac{1}{10}}$

Quando $x = 1$, $y =$ $\boxed{-1}$

Quando $x = 100$, $y =$ $\boxed{-\frac{1}{100}}$

Quando $x = \frac{1}{10}$, $y =$ $\boxed{-10}$

Quando $x = 1000$, $y =$ $\boxed{-\frac{1}{1000}}$

Quando $x = \frac{1}{100}$, $y =$ $\boxed{-100}$

$\vdots$ $\vdots$

Do gráfico de $y = -\frac{1}{x}$,

- Quanto mais x se distancia de zero, mais o gráfico se aproxima do eixo x. No entanto, ele nunca cruza o eixo x.
- Quanto mais x se aproxima de zero, mais o gráfico se aproxima do eixo y. No entanto, ele nunca cruza o eixo y.

Uma reta que se aproxima do gráfico da função sem cruzá-lo ou tocá-lo é chamada de ***assíntota*** do gráfico. As assíntotas de $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$ são $y = 0$ (o eixo x) e $x = 0$ (o eixo y).

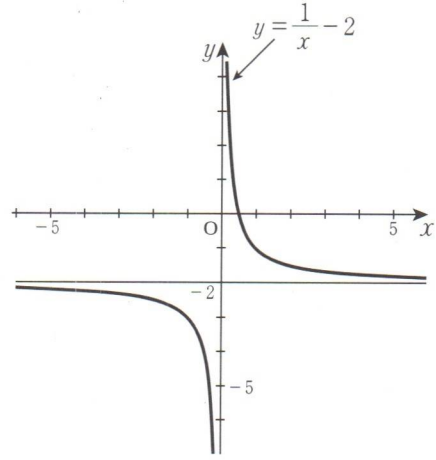
K I 23a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

(25 pontos)

Construa os gráficos das seguintes funções.

(1) $y = \frac{1}{x} - 2$

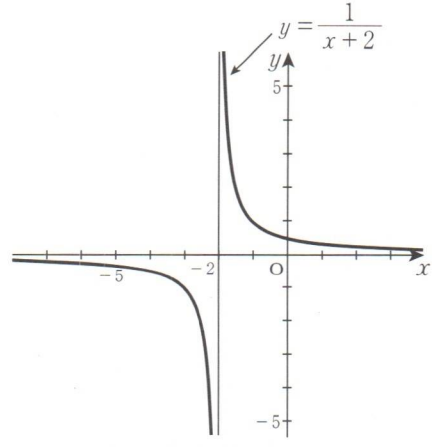
x	y
-3	$-\frac{7}{3}$
-2	$-\frac{5}{2}$
-1	-3
$-\frac{1}{2}$	-4
$-\frac{1}{3}$	-5
0	
$\frac{1}{3}$	1
$\frac{1}{2}$	0
1	-1
2	$-\frac{3}{2}$
3	$-\frac{5}{3}$



Assíntotas: $x =$ **0** , $y = -2$

(2) $y = \frac{1}{x+2}$

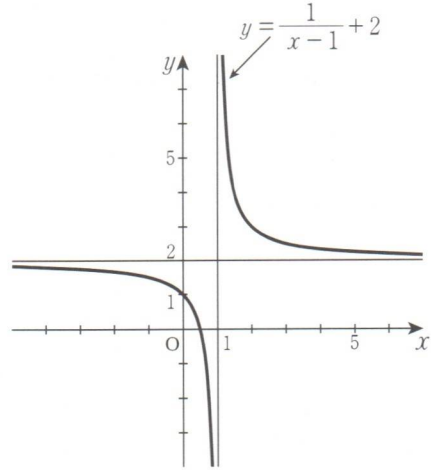
x	y
-5	$-\frac{1}{3}$
-4	$-\frac{1}{2}$
-3	-1
$-\frac{5}{2}$	-2
$-\frac{7}{3}$	-3
-2	
$-\frac{5}{3}$	3
$-\frac{3}{2}$	2
-1	1
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$



Assíntotas: $x = -2$, $y =$ **0**

(3) $y=\dfrac{1}{x-1}+2$

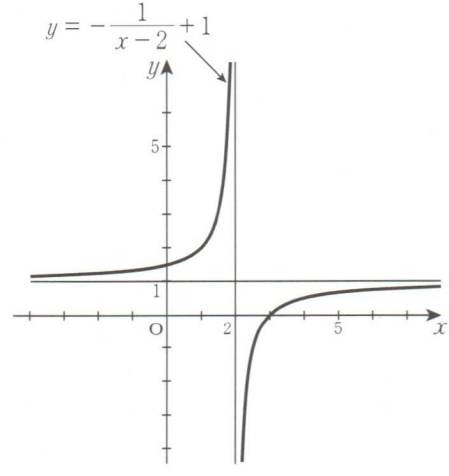
x	y
-2	$\frac{5}{3}$
-1	$\frac{3}{2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	0
$\frac{2}{3}$	-1
1	
$\frac{4}{3}$	5
$\frac{3}{2}$	4
2	3
3	$\frac{5}{2}$
4	$\frac{7}{3}$



Assíntotas: $x=$ **1** , $y=$ **2**

(4) $y=-\dfrac{1}{x-2}+1$

x	y
-1	$\frac{4}{3}$
0	$\frac{3}{2}$
1	2
$\frac{3}{2}$	3
$\frac{5}{3}$	4
2	
$\frac{7}{3}$	-2
$\frac{5}{2}$	-1
3	0
4	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{2}{3}$



Assíntotas: $x=$ **2** , $y=$ **1**

Das questões (1)～(4), as assíntotas de $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$ são $x=p$, $y=q$.

K 124a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

(33 pontos)

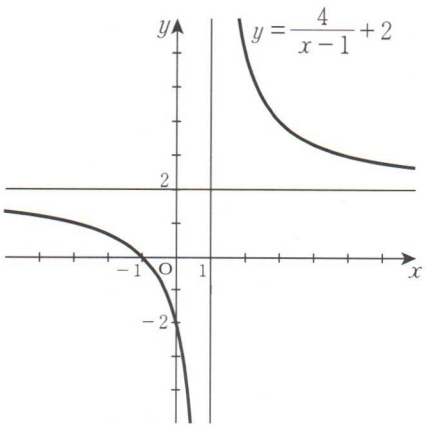
As assíntotas do gráfico de $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ $(k \neq 0)$ são $x = p$, $y = q$.

Encontre as assíntotas das seguintes funções, encontre as intersecções, e desenhe os gráficos.

Ex.

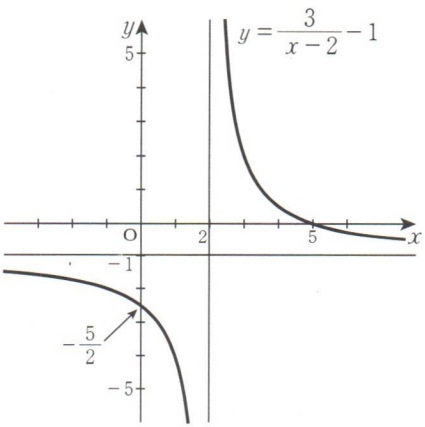
$y = \dfrac{4}{x-1} + 2$

- Assíntotas: $x = 1$, $y = 2$
- Intersecções:
  eixo x: $(-1, 0)$ ☜ Quando $x = -1, y = 0$
  eixo y: $(0, -2)$ ☜ Quando $x = 0, y = -2$
- Gráfico
  (Desenhe primeiro as assíntotas.)



(1) $y = \dfrac{3}{x-2} - 1$

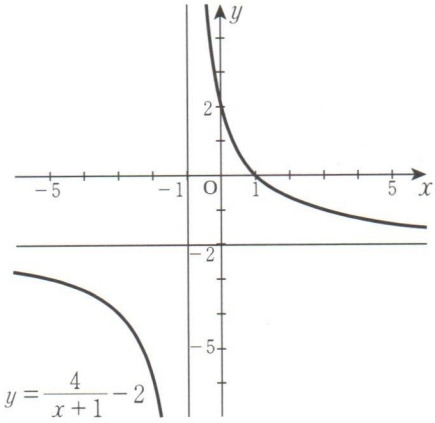
- Assíntotas: $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{y = -1}$
- Intersecções:
  eixo x: (5, 0)
  eixo y: $\left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$
- Gráfico



K 124b

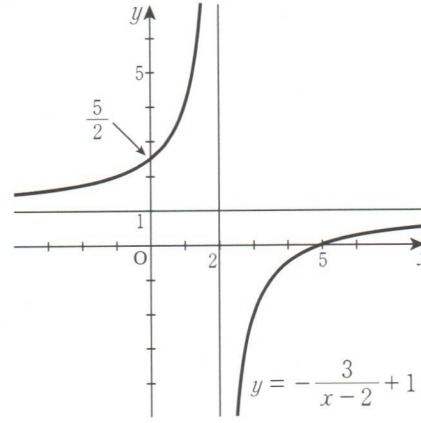
(2) $y = \dfrac{4}{x+1} - 2$

- Assíntotas: $\boldsymbol{x = -1,\ y = -2}$
- Intersecções:
  eixo x: $(1,\ 0)$
  eixo y: $(0,\ 2)$
- Gráfico



(3) $y = -\dfrac{3}{x-2} + 1$

- Assíntotas: $\boldsymbol{x = 2,\ y = 1}$
- Intersecções:
  eixo x: $(5,\ 0)$
  eixo y: $\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$
- Gráfico



K 125a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

(33 pontos)

Encontre as assíntotas das seguintes funções, encontre as intersecções, e desenhe os gráficos.

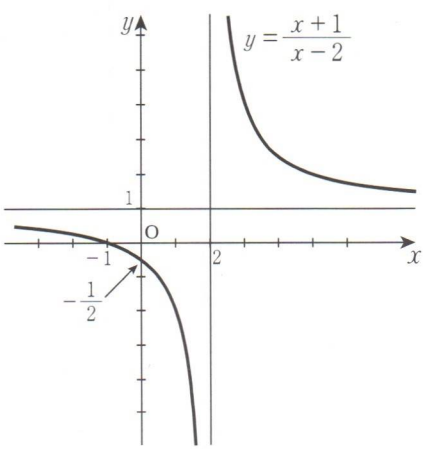
Ex.

$y = \dfrac{x+1}{x-2}$

$y = 1 + \dfrac{3}{x-2}$ ☜

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} x-2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

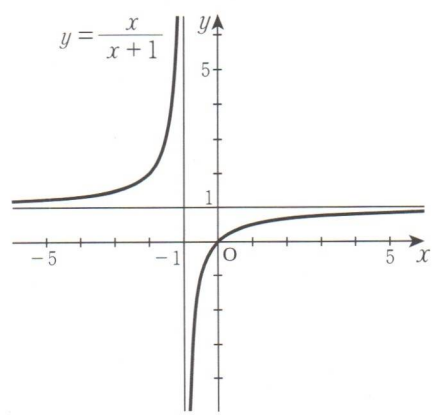
- Assíntotas: $x = 2$, $y = 1$ *Nota
- Intersecções:
  eixo x: $(-1,\ 0)$
  eixo y: $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$
- Gráfico



(1) $y = \dfrac{x}{x+1}$

$y = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

- Assíntotas: $\boldsymbol{x = -1,\ y = 1}$
- Intersecções:
  $\mathbf{(0,\ 0)}$
- Gráfico

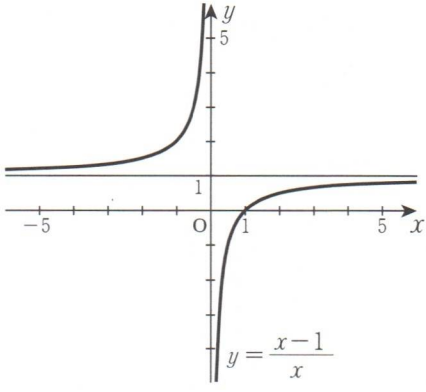


Nota: Para identificar as assíntotas de maneira mais fácil,você pode reescrever cada função como a seguir: $y = \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{(x-2)+3}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$

(2) $y = \dfrac{x-1}{x}$

$y = 1 - \dfrac{1}{x}$

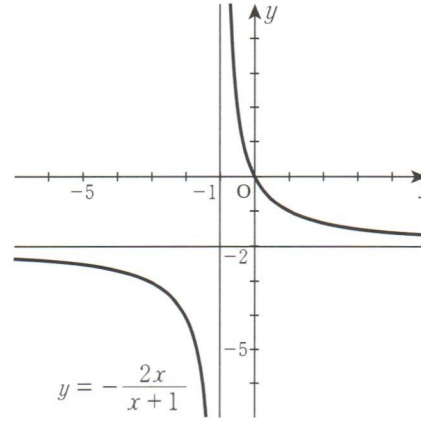
- Assíntotas: $\boldsymbol{x = 0,\ y = 1}$
- Intersecções:
  eixo x: (1, 0)
- Gráfico



(3) $y = -\dfrac{2x}{x+1}$

$y = -2 + \dfrac{2}{x+1}$

- Assíntotas: $\boldsymbol{x = -1,\ y = -2}$
- Intersecções:
  (0, 0)
- Gráfico



Para encontrar a intersecção de $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ com o eixo x, resolva a equação $ax + b = 0$ (ou seja, o numerador $= 0$).

Por exemplo, dado $y = \dfrac{x+1}{x-2}$, resolvendo $x + 1 = 0$ encontramos $x = -1$, que é a intersecção com o eixo x.

K 126a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

(33 pontos)

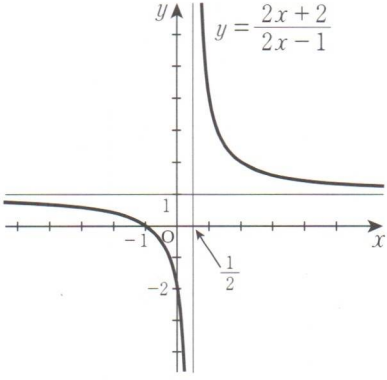
Encontre as assíntotas das seguintes funções, encontre as intersecções, e desenhe os gráficos.

Ex.

$y = \dfrac{2x+2}{2x-1}$

$y = 1 + \dfrac{3}{2x-1}$ ☜ $\begin{array}{r|l} 2x+2 & 2x-1 \\ \hline 2x-1 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$

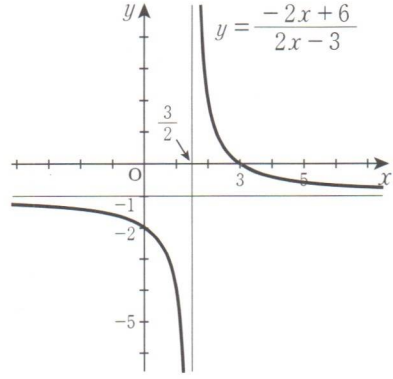
- Assíntotas: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$ *Nota
- Intersecções:
  eixo x: $(-1,\ 0)$
  eixo y: $(0,\ -2)$
- Gráfico



(1) $y = \dfrac{-2x+6}{2x-3}$

$y = -1 + \dfrac{3}{2x-3}$

- Assíntotas: $\boldsymbol{x = \dfrac{3}{2}}$, $\boldsymbol{y = -1}$
- Intersecções:
  eixo x: $(3,\ 0)$
  eixo y: $(0,\ -2)$
- Gráfico



Nota: Para identificar as assíntotas de maneira mais fácil, você pode reescrever cada função como a seguir: $y = \dfrac{2x+2}{2x-1} = \dfrac{(2x-1)+3}{2x-1} = 1 + \dfrac{3}{2x-1}$

K 126b

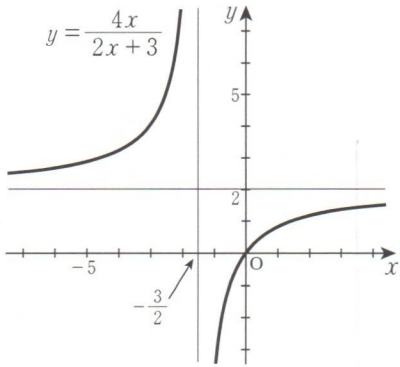
(2) $y = \dfrac{4x}{2x+3}$

$y = 2 - \dfrac{6}{2x+3}$

- Assíntotas: $\boldsymbol{x = -\dfrac{3}{2}}$, $\boldsymbol{y = 2}$

- Intersecções:
  (0, 0)

- Gráfico



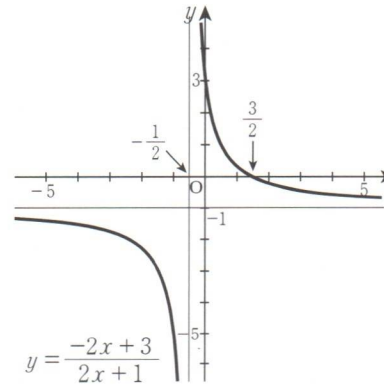
(3) $y = \dfrac{-2x+3}{2x+1}$

$y = -1 + \dfrac{4}{2x+1}$

- Assíntotas: $\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}}$, $\boldsymbol{y = -1}$

- Intersecções:
  (A intersecção com o eixo x é uma fração.)
  eixo x: $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$
  eixo y: **(0, 3)**

- Gráfico



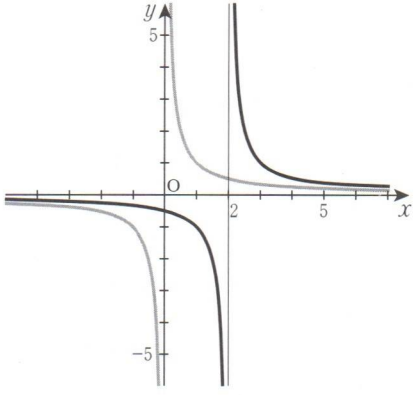
K I 27a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

(25 pontos)

Para cada função, encontre as equações das assíntotas, então desenhe-as no gráfico. (Se a assíntota for o eixo x ou y, não é necessário desenhá-la novamente.) Depois, diga como cada gráfico foi deslocado de $y = \frac{1}{x}$.

(1) $y = \frac{1}{x-2}$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{y = 0}$

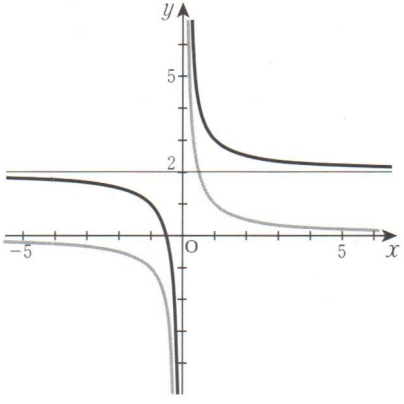


Deslocamento:

2 unidade(s) ao longo do eixo x

(2) $y = \frac{1}{x} + 2$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{y = 2}$

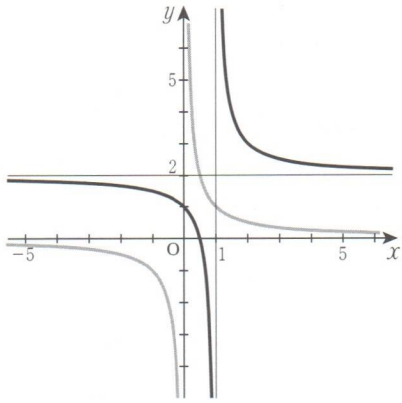


Deslocamento:

2 unidade(s) ao longo do eixo y

(3) $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = 2}$

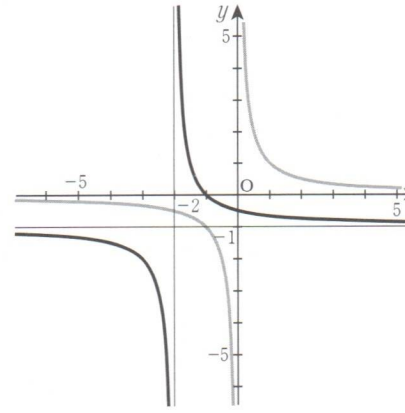


Deslocamento:

1	unidade(s) ao longo do eixo x
2	unidade(s) ao longo do eixo y

(4) $y = \dfrac{1}{x+2} - 1$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = -2}$, $\boldsymbol{y = -1}$



Deslocamento:

−2	unidade(s) ao longo do eixo x
−1	unidade(s) ao longo do eixo y

Nota: Dada a função $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ $(k \neq 0)$, as assíntotas do gráfico são $x = p$ e $y = q$.

Esse gráfico foi deslocado de $y = \dfrac{k}{x}$, p unidades ao longo do eixo x e q unidades ao longo do eixo y.

K 128a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

(25 pontos)

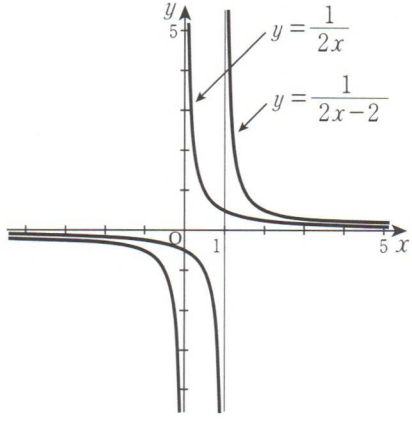
Para cada função, encontre as equações das assíntotas, então desenhe-as no gráfico. Depois, diga como cada gráfico foi deslocado de $y = \frac{1}{2x}$.

(1) $y = \frac{1}{2x-2}$

$= \frac{1}{2(x-\boxed{1})}$

Assíntotas:

$x = \boxed{1}$, $y = \boxed{0}$

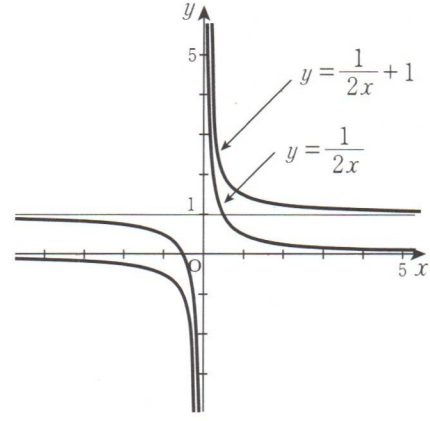


Deslocamento:

$\boxed{1}$ unidade(s) ao longo do eixo x

(2) $y = \frac{1}{2x} + 1$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{y = 1}$



Deslocamento:

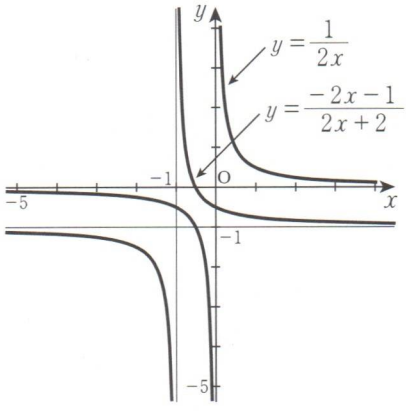
$\boxed{1}$ unidade(s) ao longo do eixo y

K 128b

(3) $y = \dfrac{-2x-1}{2x+2}$

$= \dfrac{1}{2(x+\boxed{1})} - \boxed{1}$

Assíntotas: $\boldsymbol{x=-1}$, $\boldsymbol{y=-1}$



Deslocamento:

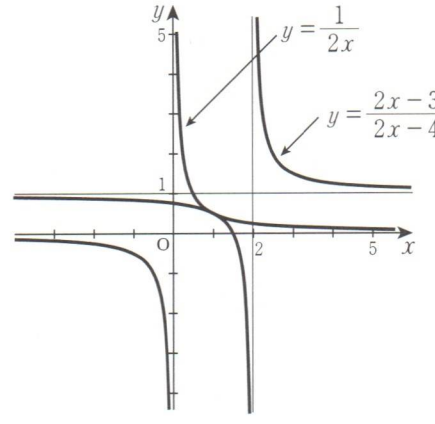
$\boxed{-1}$ unidade(s) ao longo do eixo x

$\boxed{-1}$ unidade(s) ao longo do eixo y

(4) $y = \dfrac{2x-3}{2x-4}$

$= \dfrac{1}{2(x-2)} + 1$

Assíntotas: $\boldsymbol{x=2}$, $\boldsymbol{y=1}$



Deslocamento:

$\boxed{2}$ unidade(s) ao longo do eixo x

$\boxed{1}$ unidade(s) ao longo do eixo y

K 129a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

(7 pontos)

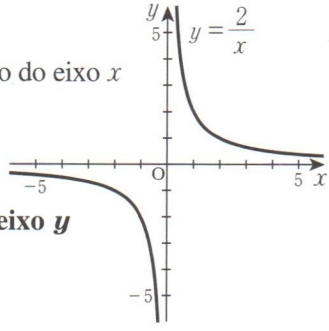
1. Diga como cada um dos seguintes gráficos foram deslocados a partir de $y = \frac{2}{x}$.

(1) $y = \frac{2}{x-1}$

[Res.] Deslocamento: [1] unidade(s) ao longo do eixo x

(2) $y = \frac{2}{x} + 3$

[Res.] Deslocameto: **3 unidades ao longo do eixo y**



(3) $y = \frac{2}{x+3} - 1$

[Res.] Deslocamento: **-3 unidades ao longo do eixo x,**
e -1 unidade ao longo do eixo y

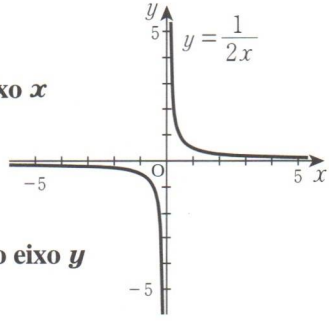
2. Diga como cada um dos seguintes gráficos foram deslocados a partir de $y = \frac{1}{2x}$.

(1) $y = \frac{1}{2x-2} = \frac{1}{2(x-[\ 1\ ])}$

[Res.] Deslocamento: **1 unidade ao longo do eixo x**

(2) $y = \frac{1}{2x} - 2$

[Res.] Deslocamento: **-2 unidades ao longo do eixo y**



(3) $y = \frac{1}{2x+4} + 1 = \frac{1}{2(x+[\ 2\ ])} + 1$

[Res.] Deslocamento: **-2 unidades ao longo do eixo x,**
e 1 unidade ao longo do eixo y

K 129b

3. Dada a função $y=\frac{1}{x}$, escreva a equação da função obtida em cada deslocamento.

(1) 3 unidades ao longo do eixo y

[Res.] $\boldsymbol{y=\frac{1}{x}+3}$

(2) -1 unidade ao longo do eixo x

[Res.] $\boldsymbol{y=\frac{1}{x+1}}$

(3) 2 unidades ao longo do eixo x, e -1 unidade ao longo do eixo y

[Res.] $\boldsymbol{y=\frac{1}{x-2}-1}$

(4) -3 unidades ao longo do eixo x, e 2 unidades ao longo do eixo y

[Res.] $\boldsymbol{y=\frac{1}{x+3}+2}$

4. Dada a função $y=-\frac{2}{x}$, escreva a equação da função obtida em cada deslocamento.

(1) -1 unidade ao longo do eixo y

[Res.] $\boldsymbol{y=-\frac{2}{x}-1}$

(2) 3 unidades ao longo do eixo x

[Res.] $\boldsymbol{y=-\frac{2}{x-3}}$

(3) 1 unidade ao longo do eixo x, e -3 unidades ao longo do eixo y

[Res.] $\boldsymbol{y=-\frac{2}{x-1}-3}$

(4) -2 unidades ao longo do eixo x, e 1 unidade ao longo do eixo y

[Res.] $\boldsymbol{y=-\frac{2}{x+2}+1}$

K I 30a KUMON Gráfico da Função Fracionária I

(11 pontos)

1. Para cada função, associe as letras (A)~(F) do gráfico correspondente.

(1) $y=\frac{2}{x}+1$ … **(C)**

(2) $y=\frac{2}{x-1}$ … **(F)**

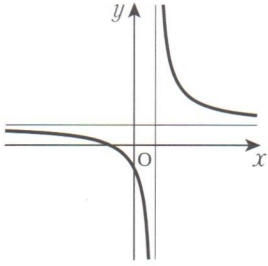
(3) $y=1+\frac{2}{x-1}$ … **(A)**

(4) $y=1-\frac{2}{x-1}$ … **(E)**

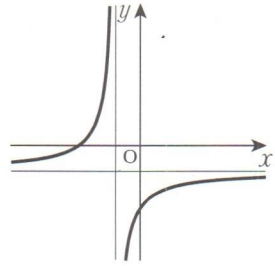
(5) $y=-1-\frac{2}{x+1}$ … **(B)**

(6) $y=-1+\frac{2}{x+1}$ … **(D)**

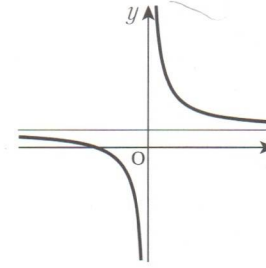
(A)



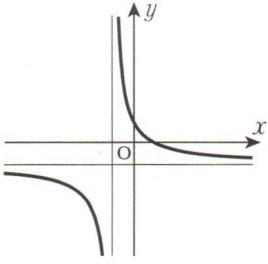
(B)



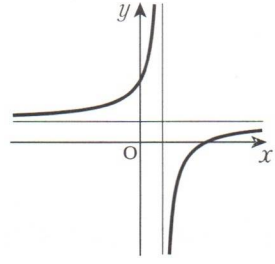
(C)



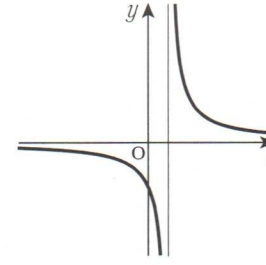
(D)



(E)



(F)



K 130b

2. Escreva as letras (A)∼(F) das funções que satisfaçam cada condição (1)∼(3).

(1) Os gráficos que foram obtidos do deslocamento de $y=\frac{1}{x}$ são … **(A)**, **(C)**

(2) Os gráficos que foram obtidos do deslocamento de $y=-\frac{1}{x}$ são … **(B)**, **(E)**

(3) Os gráficos que foram obtidos do deslocamento de $y=\frac{1}{2x}$ são … **(D)**, **(F)**

(A) $y=\frac{1}{x-4}$

(B) $y=\frac{x-3}{x-2}=\boxed{1}-\frac{\boxed{1}}{x-2}$

(C) $y=\frac{2x+3}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$

(D) $y=\frac{1}{2(x-1)}$

(E) $y=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$

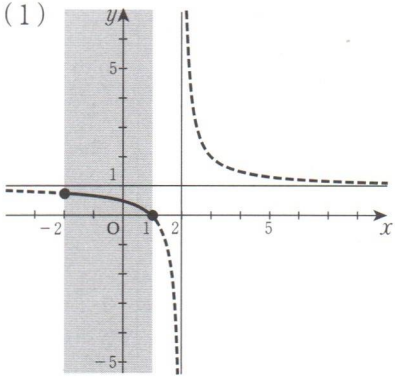
(F) $y=\frac{2x+5}{2x+4}=1+\frac{1}{2(x+2)}$

K I 3 I a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

(20 pontos)

Dada a função $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$, encontre os valores máximo e mínimo para cada domínio dado. E escreva a imagem de $f(x)$.

(1)



Quando $-2 \leq x \leq 1$,

$f(-2) =$ $\boxed{\dfrac{3}{4}}$, $f(1) =$ $\boxed{0}$

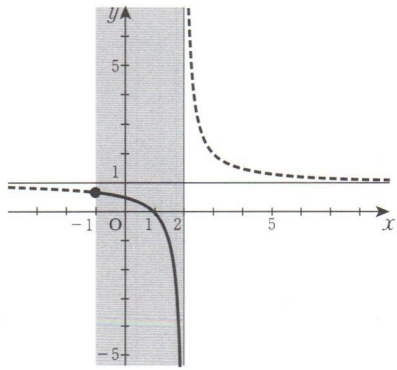
Do gráfico:

Valor máximo: $\boxed{\dfrac{3}{4}}$ (quando $x =$ $\boxed{-2}$)

Valor mínimo: $\boxed{0}$ (quando $x =$ $\boxed{1}$)

Imagem: $\boxed{0} \leq f(x) \leq \boxed{\dfrac{3}{4}}$

(2)



Quando $-1 \leq x < 2$,

$f(-1) =$ $\boxed{\dfrac{2}{3}}$, $f(2)$ não está definido

Nota: Quando $x = 2$, $f(x)$ é indefinido.

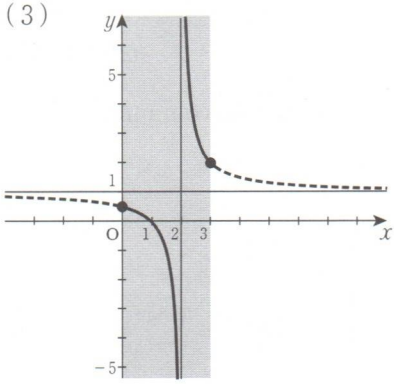
Do gráfico:

Valor máximo: $\boxed{\dfrac{2}{3}}$ (quando $x =$ $\boxed{-1}$)

Valor mínimo: não existe

Imagem: $f(x) \leq \boxed{\dfrac{2}{3}}$

(3)



Quando $0 \leq x \leq 3$ (mas com $x \neq 2$),

$f(0) =$ $\boxed{\frac{1}{2}}$, $f(3) =$ $\boxed{2}$

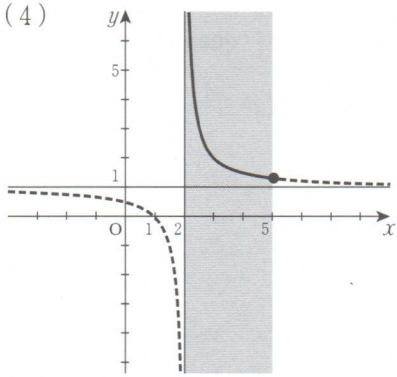
Do gráfico:

Valor máximo: não existe

Valor mínimo: **não existe**

Imagem: $f(x) \leq$ $\boxed{\frac{1}{2}}$, $f(x) \geq$ $\boxed{2}$

(4)



Quando $2 < x \leq 5$,

$f(2)$ não está definido, $f(5) =$ $\boxed{\frac{4}{3}}$

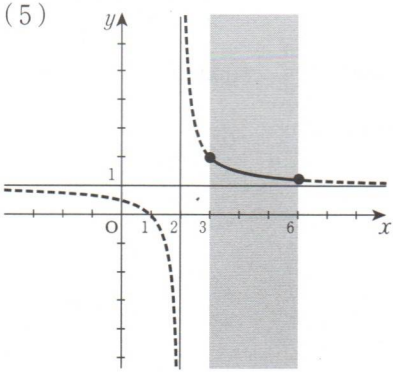
Do gráfico:

Valor máximo: **não existe**

Valor mínimo: $\boxed{\frac{4}{3}}$ (quando $x =$ $\boxed{5}$)

Imagem: $f(x) \geq$ $\boxed{\frac{4}{3}}$

(5)



Quando $3 \leq x \leq 6$,

$f(3) =$ $\boxed{2}$, $f(6) =$ $\boxed{\frac{5}{4}}$

Do gráfico:

Valor máximo: $\boxed{2}$ (quando $x =$ $\boxed{3}$)

Valor mínimo: $\boxed{\frac{5}{4}}$ (quando $x =$ $\boxed{6}$)

Imagem: $\boxed{\frac{5}{4}} \leq f(x) \leq$ $\boxed{2}$

K I 32a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

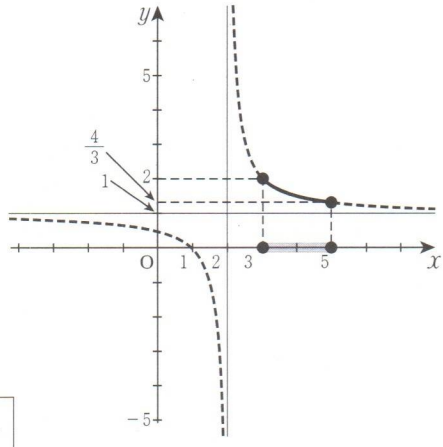
(50 pontos)

Para cada função, desenhe o gráfico, depois encontre a imagem para o domínio dado.

Ex.

$f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ $(3 \le x \le 5)$

[Res.] $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$



- Assíntotas:
  $x = 2,\ y = 1$
- Intersecções:
  eixo x: $(1,\ 0)$
  eixo y: $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$
- Imagem:
  $f(3) =$ **2**, $f(5) =$ $\dfrac{4}{3}$

Do gráfico, $\dfrac{4}{3} \le f(x) \le$ **2**

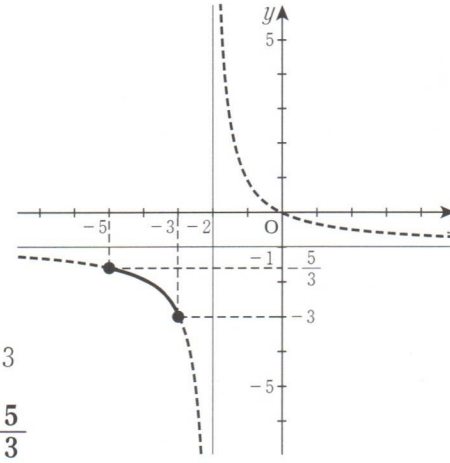
Respostas: em ordem $2,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3},\ 2$

K 132b

(1) $f(x)=\dfrac{-x}{x+2}$ $(-5\le x\le -3)$

[Res.] $f(x)=-1+\dfrac{2}{x+2}$

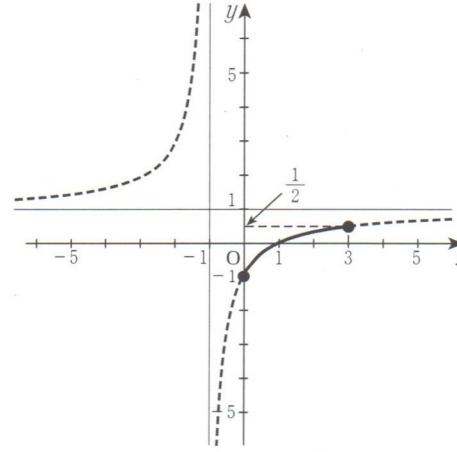
- Assíntotas:
  $\boldsymbol{x=-2,\ y=-1}$
- Intersecções:
  $\boldsymbol{(0,\ 0)}$
- Imagem:
  $f(-5)=-\dfrac{5}{3}$, $f(-3)=-3$
  Do gráfico, $\boldsymbol{-3\le f(x)\le -\dfrac{5}{3}}$



(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ $(0\le x\le 3)$

[Res.] $f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$

- Assíntotas:
  $\boldsymbol{x=-1,\ y=1}$
- Intersecções:
  eixo x: $\boldsymbol{(1,\ 0)}$
  eixo y: $\boldsymbol{(0,\ -1)}$
- Imagem:
  $f(0)=-1$, $f(3)=\dfrac{1}{2}$
  Do gráfico, $\boldsymbol{-1\le f(x)\le \dfrac{1}{2}}$



K I 33a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

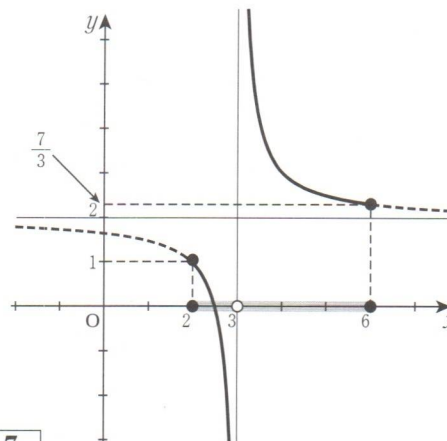
(50 pontos)

Para cada função, desenhe o gráfico e encontre a imagem.

Ex.

$f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$ $(2 \le x \le 6$, mas com $x \neq 3)$

[Res.] $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-3}$



- Assíntotas:
  $x = 3$, $y = 2$
- Intersecções:
  eixo x: $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$
  eixo y: $\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$
- Imagem:
  $f(2) =$ [1], $f(6) =$ [$\dfrac{7}{3}$]

  Do gráfico, $f(x) \le$ [1], $f(x) \ge$ [$\dfrac{7}{3}$]

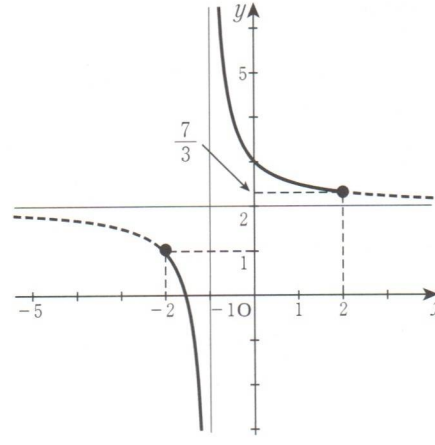
Respostas: em ordem 1, $\frac{7}{3}$, 1, $\frac{7}{3}$

K 133b

(1) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ $(-2\le x\le 2$, mas com $x\neq -1)$

[Res.] $f(x)=2+\dfrac{1}{x+1}$

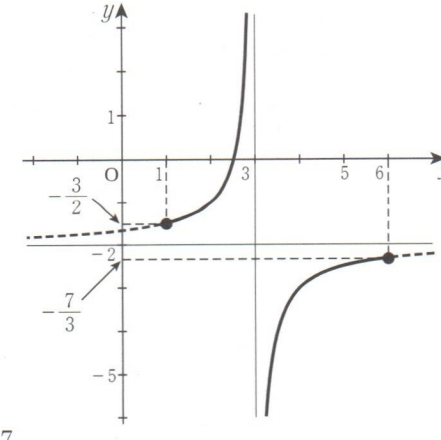
- Assíntotas:
  $\boldsymbol{x=-1,\ y=2}$
- Intersecções:
  eixo x: $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$
  eixo y: $(0,\ 3)$
- Imagem:
  $f(-2)=1,\ f(2)=\dfrac{7}{3}$
  Do gráfico, $\boldsymbol{f(x)\le 1,\ f(x)\ge \dfrac{7}{3}}$



(2) $f(x)=\dfrac{-2x+5}{x-3}$ $(1\le x\le 6$, mas com $x\neq 3)$

[Res.] $f(x)=-2-\dfrac{1}{x-3}$

- Assíntotas:
  $\boldsymbol{x=3,\ y=-2}$
- Intersecções:
  eixo x: $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$
  eixo y: $\left(0,\ -\dfrac{5}{3}\right)$
- Imagem:
  $f(1)=-\dfrac{3}{2},\ f(6)=-\dfrac{7}{3}$
  Do gráfico, $\boldsymbol{f(x)\le -\dfrac{7}{3},\ \ f(x)\ge -\dfrac{3}{2}}$



K I 34a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

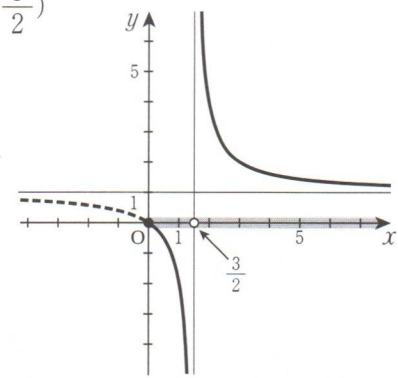
(20 pontos)

1. Para cada função, desenhe o gráfico e encontre a imagem.

Ex.

$f(x)=\dfrac{2x}{2x-3}$ $(x \geq 0$, mas com $x \neq \dfrac{3}{2})$

[Res.] $f(x)=1+\dfrac{3}{2x-3}$



- Assíntotas:

  $x=\dfrac{3}{2}$, $y=1$

- Intersecções:

  $(0,\ 0)$

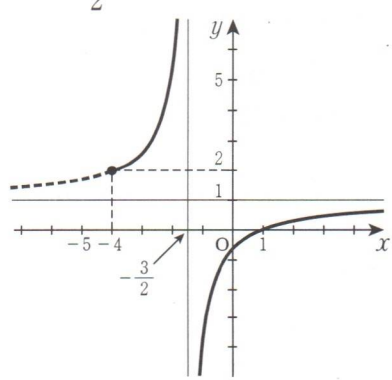
- Imagem:

  $f(0)=0$

  Do gráfico, $f(x) \leq 0$, $f(x)>1$

(1) $f(x)=\dfrac{2x-2}{2x+3}$ $(x \geq -4$, mas com $x \neq -\dfrac{3}{2})$

[Res.] $f(x)=1-\dfrac{5}{2x+3}$



- Assíntotas:

  $\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{2}}$, $\boldsymbol{y=1}$

- Intersecções:

  eixo x: $(1,\ 0)$

  eixo y: $\left(0,\ -\dfrac{2}{3}\right)$

- Imagem:

  $f(-4)=2$

  Do gráfico, $\boldsymbol{f(x)<1}$, $\boldsymbol{f(x) \geq 2}$

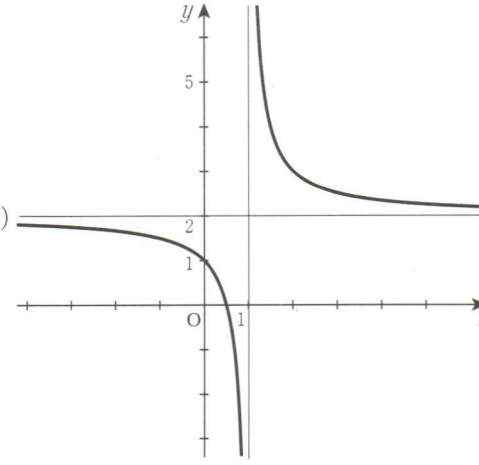
2. Dada a função $f(x)=2+\dfrac{1}{x-1}$, encontre a imagem para cada domínio dado.

(1) $2 \le x \le 4$

[Res.] $f(2)=3$, $f(4)=\dfrac{7}{3}$

Do gráfico,

$$\boldsymbol{\frac{7}{3} \le f(x) \le 3}$$



(2) $-2 \le x \le 2$ (mas com $x \neq 1$)

[Res.] $f(-2)=\dfrac{5}{3}$, $f(2)=3$

Do gráfico,

$$\boldsymbol{f(x) \le \frac{5}{3},\ f(x) \ge 3}$$

(3) $x \ge 2$

[Res.] $f(2)=3$

Do gráfico,

$$\boldsymbol{2 < f(x) \le 3}$$

(4) $x \ge -2$ (mas com $x \neq 1$)

[Res.] $f(-2)=\dfrac{5}{3}$

Do gráfico,

$$\boldsymbol{f(x) \le \frac{5}{3},\ f(x) > 2}$$

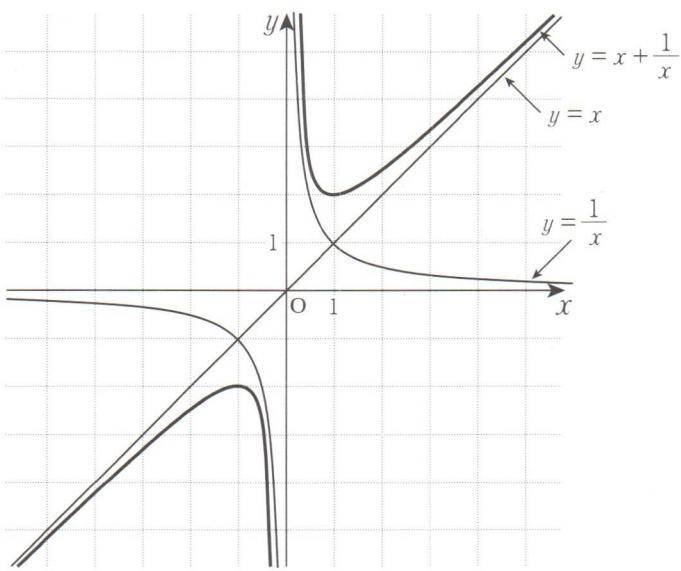
K I 135a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

(50 pontos)

1. Construa os gráficos das seguintes funções.

(1) $y = x + \frac{1}{x}$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4		**4**	**2**	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	$-\frac{17}{4}$	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{17}{4}$		$\frac{17}{4}$	$\frac{5}{2}$	**2**	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{4}$

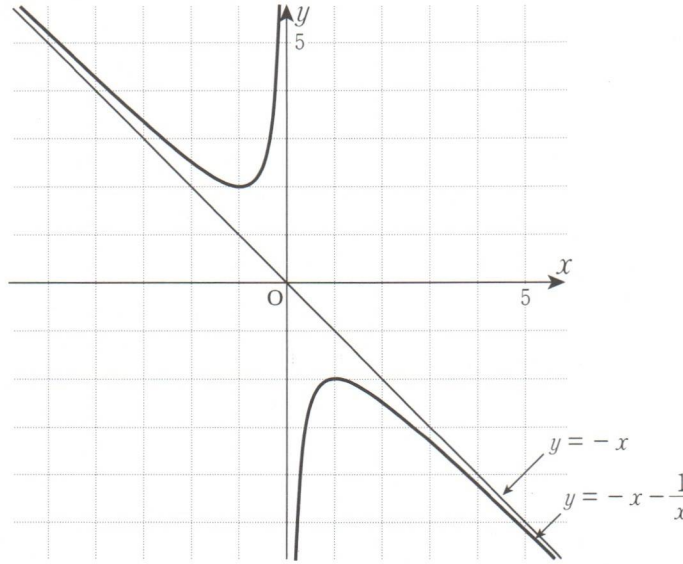


Do gráfico de $y = x + \frac{1}{x}$,

- Quanto mais x se afasta de zero, mais o gráfico se aproxima da reta $y = x$. No entanto, ele nunca cruza a reta $y = x$.
- Quanto mais x se aproxima de zero, mais o gráfico se aproxima do eixo y. No entanto, ele nunca cruza o eixo y.

(2) $y = -x - \dfrac{1}{x}$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$\frac{17}{4}$	$\frac{5}{2}$	2	$\mathbf{\frac{5}{2}}$	$\mathbf{\frac{17}{4}}$		$\mathbf{-\frac{17}{4}}$	$\mathbf{-\frac{5}{2}}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-\frac{5}{2}}$	$\mathbf{-\frac{17}{4}}$



2. Preencha os quadros em branco abaixo.

As assíntotas de $y = x + \dfrac{1}{x}$ são: $x = 0$, $y = x$. (Veja a face a.)

As assíntotas de $y = -x - \dfrac{1}{x}$ são: $x =$ **0**, $y =$ $\boldsymbol{-x}$.

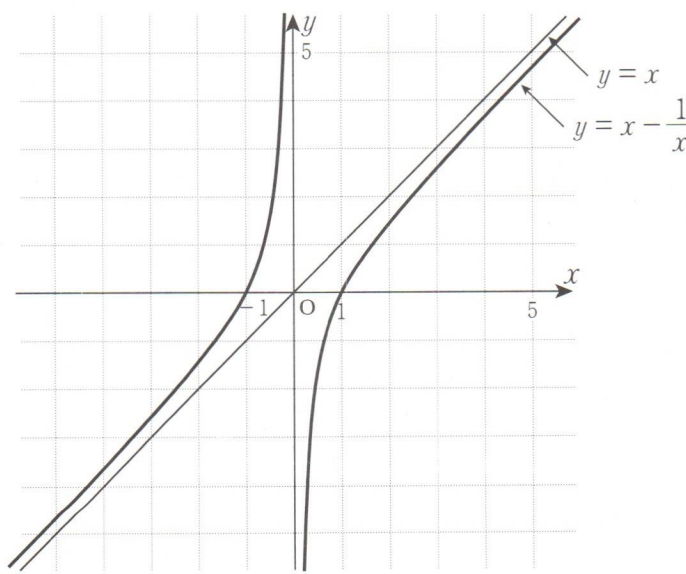
K I 36a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

(50 pontos)

1. Construa os gráficos das seguintes funções.

(1) $y = x - \frac{1}{x}$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$		$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$



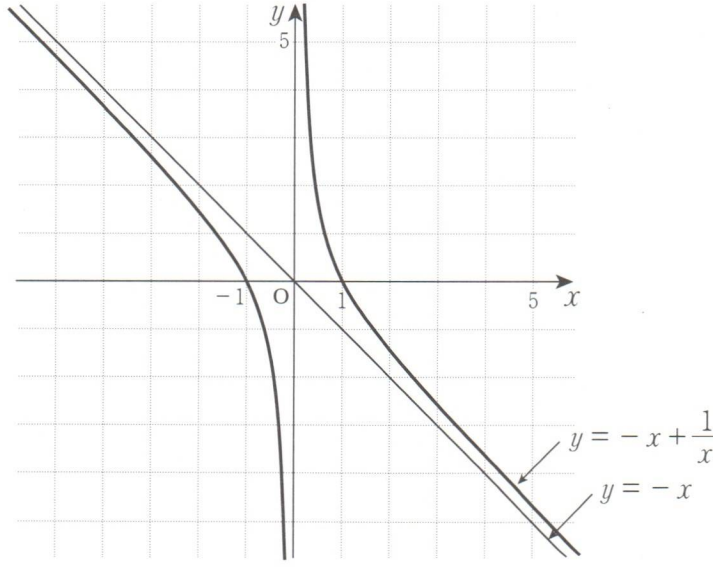
Do gráfico de $y = x - \frac{1}{x}$,

- Quanto mais x se afasta de zero, mais o gráfico se aproxima da reta $y = x$. No entanto, ele nunca cruza a reta $y = x$.
- Quanto mais x se aproxima de zero, mais o gráfico se aproxima do eixo y. No entanto, ele nunca cruza o eixo y.

K 136b

(2) $y = -x + \frac{1}{x}$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\mathbf{-\frac{3}{2}}$	$\mathbf{-\frac{15}{4}}$		$\mathbf{\frac{15}{4}}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	**0**	$\mathbf{-\frac{3}{2}}$	$\mathbf{-\frac{15}{4}}$



2. Preencha os quadros em branco abaixo.

As assíntotas de $y = x - \frac{1}{x}$ são: $x = 0$, $y = x$. (Veja a face a.)

As assíntotas de $y = -x + \frac{1}{x}$ são: $x =$ **0**, $y =$ $\boldsymbol{-x}$.

As assíntotas do gráfico $y = ax + \frac{b}{x}$ são: $x = 0$, $y = ax$.

K I 37a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

(25 pontos)

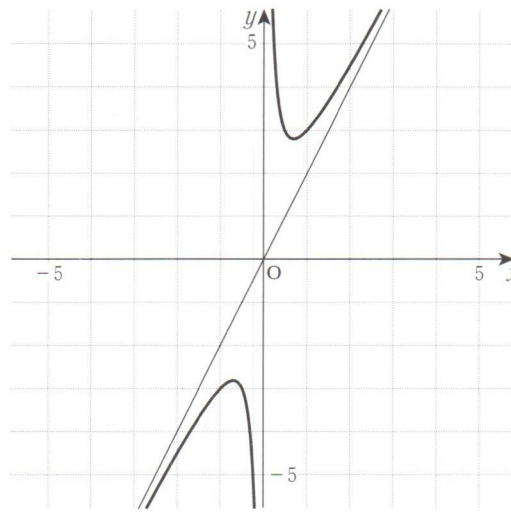
As assíntotas do gráfico $y = ax + \frac{b}{x}$ são: $x = 0$, $y = ax$.

Encontre as assíntotas para cada função, e desenhe o gráfico.

(1) $y = 2x + \frac{1}{x}$

Assíntotas:

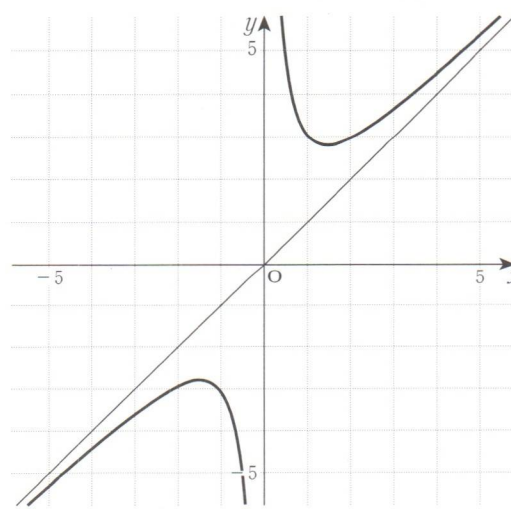
$x =$ **0**, $y =$ **2x**



(2) $y = x + \frac{2}{x}$

Assíntotas:

$x = 0$, $y = x$

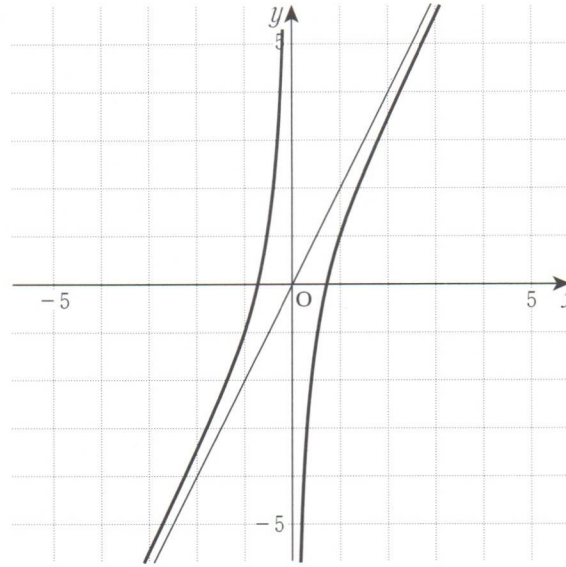


K 137b

(3) $y = 2x - \dfrac{1}{x}$

Assíntotas:

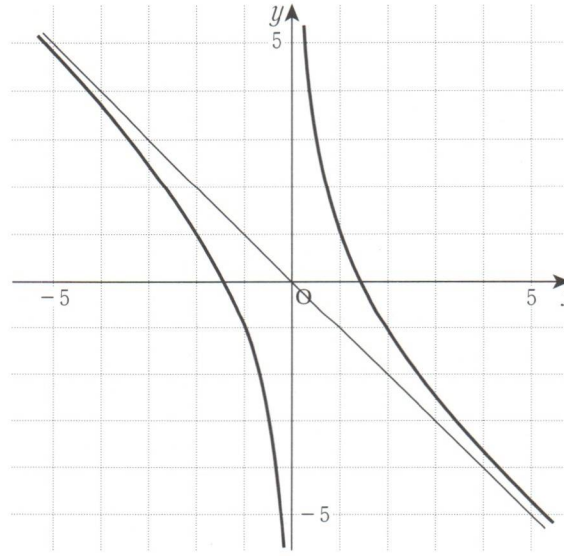
$\boldsymbol{x = 0,\ y = 2x}$



(4) $y = -x + \dfrac{2}{x}$

Assíntotas:

$\boldsymbol{x = 0,\ y = -x}$



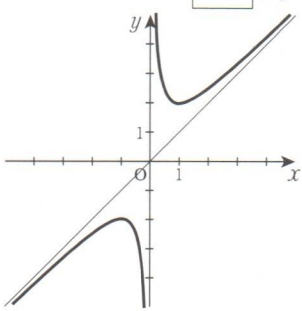
K I 38a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

(7 pontos)

1. Para cada função, encontre as equações das assíntotas e desenhe-as no gráfico.

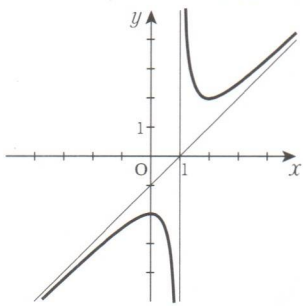
(1) $y = x + \frac{1}{x}$

Assíntotas: $x =$ [**0**], $y =$ [$\boldsymbol{x}$]



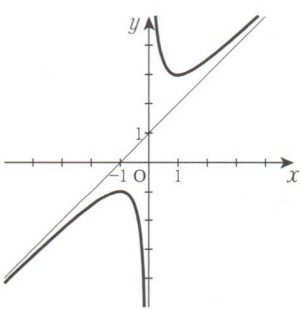
(3) $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = x - 1}$



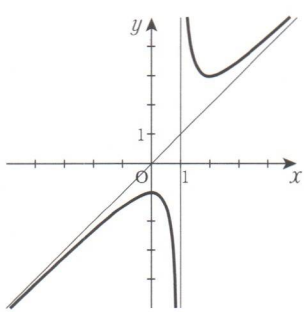
(2) $y = x + 1 + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{y = x + 1}$



(4) $y = x + \frac{1}{x-1} = \left(x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) + 1$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = x}$



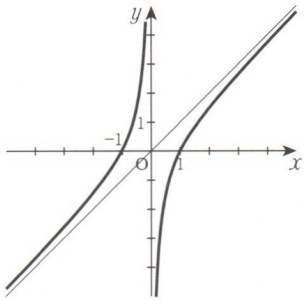
2. Complete os quadros abaixo usando os gráficos acima:

- (2) é um deslocamento de (1), [**1**] unidade(s) ao longo do eixo y.
- (3) é um deslocamento de (1), [**1**] unidade(s) ao longo do eixo x.
- (4) é um deslocamento de (1), [**1**] unidade(s) ao longo do eixo x, e [**1**] unidade(s) ao longo do eixo y.

3. Para cada função, encontre as equações das assíntotas e desenhe-as no gráfico.

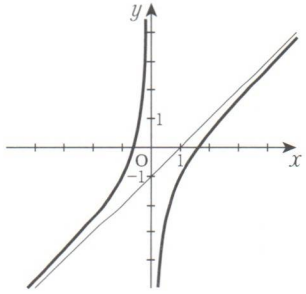
(1) $y = x - \dfrac{1}{x}$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 0,\ y = x}$



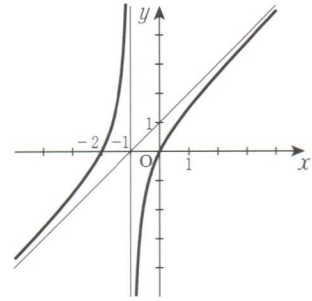
(2) $y = x - 1 - \dfrac{1}{x} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right) - 1$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 0,\ y = x - 1}$



(3) $y = x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$

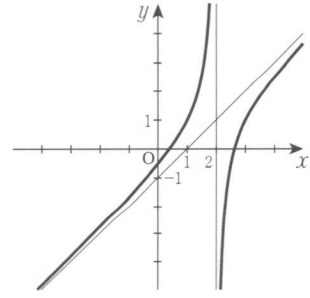
Assíntotas: $\boldsymbol{x = -1,\ y = x + 1}$



(4) $y = x - 1 - \dfrac{1}{x-2}$

$= \left(x - 2 - \dfrac{1}{x-2}\right) + 1$

Assíntotas: $\boldsymbol{x = 2,\ y = x - 1}$



4. Complete os quadros abaixo usando os gráficos acima:

• (2) é um deslocamento de (1), $\boxed{-1}$ unidade(s) ao longo do eixo y.

• (3) é um deslocamento de (1), $\boxed{-1}$ unidade(s) ao longo do eixo x.

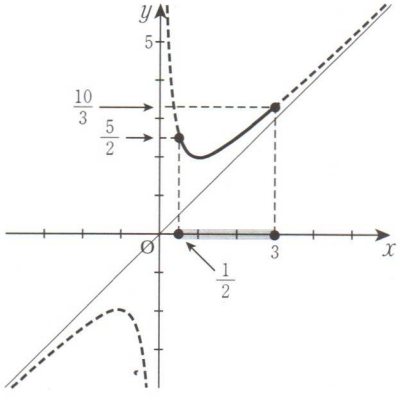
• (4) é um deslocamento de (1), $\boxed{2}$ unidade(s) ao longo do eixo x, e $\boxed{1}$ unidade(s) ao longo do eixo y.

K I 39a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

(50 pontos)

Ex.

Dada a função $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $(\frac{1}{2} \leq x \leq 3)$, desenhe o gráfico e encontre o valor máximo.



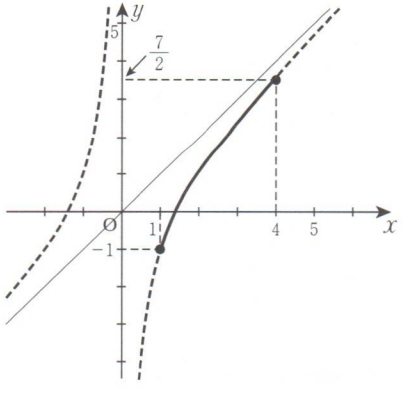
[Res.] $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$

$f(3) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

Do gráfico:

Valor máximo: $f(3) = \frac{10}{3}$

1. Dada a função $f(x) = x - \frac{2}{x}$ $(1 \leq x \leq 4)$, desenhe o gráfico e encontre o valor mínimo.



[Res.] $f(1) = 1 - \frac{2}{1} = -1$

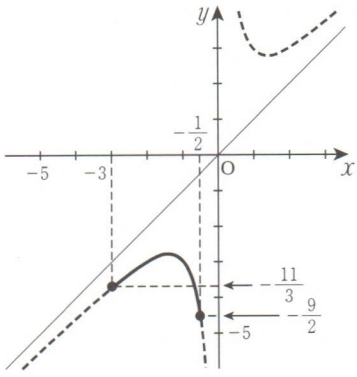
$f(4) = 4 - \frac{2}{4} = \frac{7}{2}$

Do gráfico:

Valor mínimo: $\boldsymbol{f(1) = -1}$

K 139b

2. Dada a função $f(x) = x + \frac{2}{x}$ $(-3 \le x \le -\frac{1}{2})$, desenhe o gráfico e encontre o valor mínimo.



[Res.] $f(-3) = -3 + \frac{2}{-3} = -\frac{11}{3}$

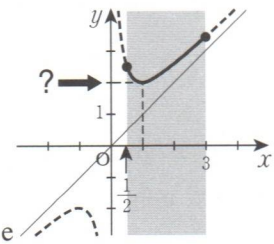
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -\frac{9}{2}$

Do gráfico:

Valor mínimo: $\boldsymbol{f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}}$

Considere isso!

Podemos encontrar o valor mínimo da função na face a, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $(\frac{1}{2} \le x \le 3)$, usando *média aritmética* e *média geométrica*.



Dados dois números, x e $\frac{1}{x}$ (onde $x > 0$ e $\frac{1}{x} > 0$), a partir da relação entre média aritmética e média geométrica,

$x + \frac{1}{x} \ge 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \boxed{2}$ ☜ Quando $x = \frac{1}{x}$, ou seja, quando $x = 1$, a inequação torna-se uma igualdade.

Portanto, o valor mínimo é $f(1) = \boxed{2}$.

A relação entre *média aritmética* e *média geométrica* pode ser encontrada no J197.

Quando $a > 0$, $b > 0$, então $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ ☜ Quando $a = b$, a inequação torna-se uma igualdade.

Respostas: 2, 2

K 140a KUMON Gráfico da Função Fracionária II

(14 pontos)

1. Para cada função, associe as letras (A)~(F) do gráfico correspondente.

(1) $y=1+\dfrac{1}{x-1}$ … **(C)**

(2) $y=x-1+\dfrac{1}{x-1}$ … **(F)**

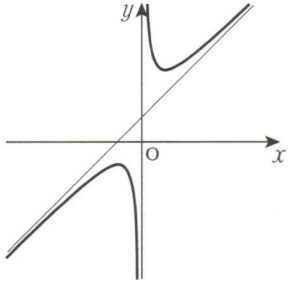
(3) $y=x-\dfrac{1}{x+1}$ … **(B)**

(4) $y=1-\dfrac{1}{x+1}$ … **(D)**

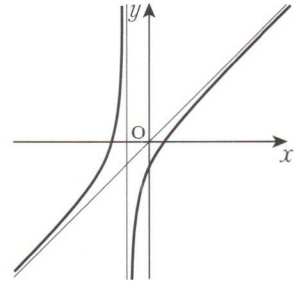
(5) $y=x+1+\dfrac{1}{x}$ … **(A)**

(6) $y=x-1-\dfrac{1}{x}$ … **(E)**

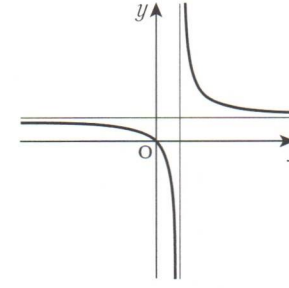
(A)



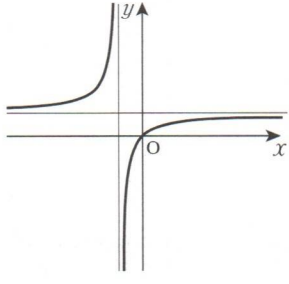
(B)



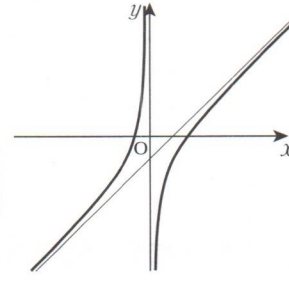
(C)



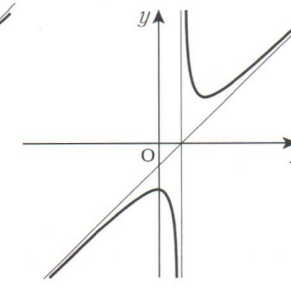
(D)



(E)

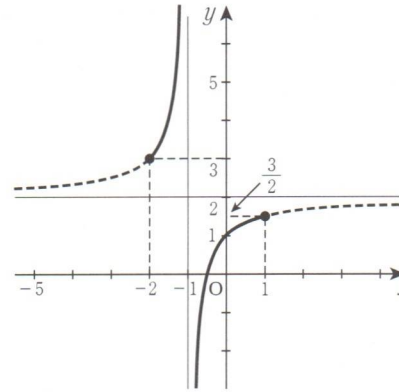


(F)



2. Dada a função $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ $(-2\le x\le 1$, mas com $x\neq -1)$, desenhe o gráfico e encontre a imagem.

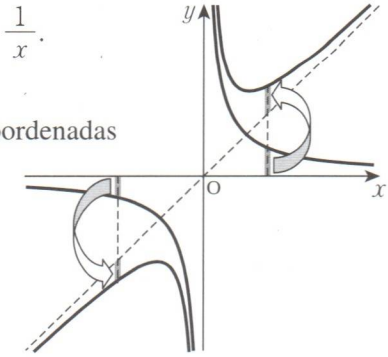
[Res.] $f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$



- Assíntotas:
  $\boldsymbol{x=-1,\ y=2}$
- Intersecções:
  eixo x: $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$
  eixo y: $(0,\ 1)$
- Imagem:
  $f(-2)=3,\ f(1)=\dfrac{3}{2}$
  Do gráfico, $\boldsymbol{f(x)\le\dfrac{3}{2},\ f(x)\ge 3}$

Considere isso!

Encontre a relação entre o gráfico de $y=x+\dfrac{1}{x}$ e os gráficos de $y=x$ e $y=\dfrac{1}{x}$.



Do gráfico, podemos observar que as coordenadas do eixo y de $y=x+\dfrac{1}{x}$ é a soma das coordenadas do eixo y de $y=\boxed{\dfrac{1}{x}}$ e as coordenadas do eixo y de $y=x$.

Resposta: $\dfrac{1}{x}$

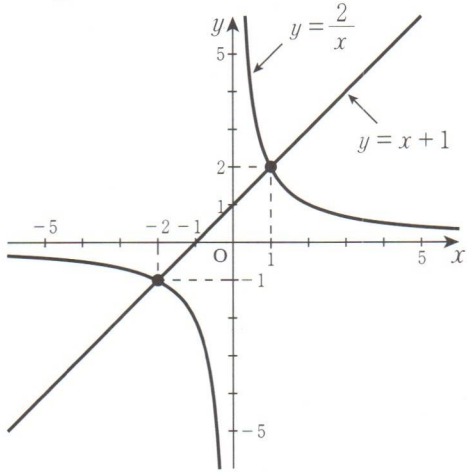
K 141a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(50 pontos)

Ex.

Faça o gráfico das seguintes funções, e encontre os pontos comuns.

$y = \frac{2}{x}$, $y = x + 1$



[Res.] Seja $\frac{2}{x} = x + 1$,

$x^2 + x - 2 = 0$ (mas com $x \neq 0$)

$(x+2)(x-$ [1] $) = 0$

$x = -2,$ [1]

Portanto, os pontos comuns são:

$(-2, -1)$, ([1] , [2])

Multiplique ambos os lados da equação por x.

Observe que se $x = 0$, o denominador de $\frac{2}{x}$ será zero, o que torna indefinida a equação.

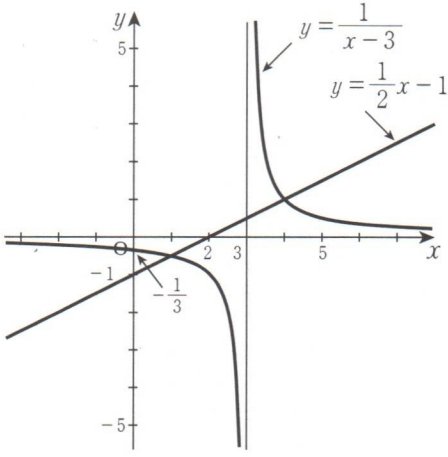
Portanto, devemos excluir o caso $x = 0$.

Respostas: em ordem 1, 1, 2

K 141 b

Faça o gráfico das seguintes funções, e encontre os pontos comuns.

(1) $y=\dfrac{1}{x-3}$, $y=\dfrac{1}{2}x-1$



[Res.] Seja $\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{2}x-1$,

$2=(x-3)x-2(x-3)$

(onde $x\neq 3$)

$x^2-5x+4=0$

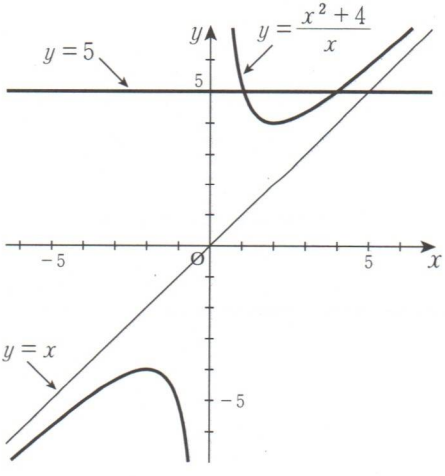
$(x-4)(x-1)=0$

$x=4,\ 1$

Portanto, os pontos comuns são:

(4, 1), $\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $y=\dfrac{x^2+4}{x}$, $y=5$



[Res.] $y=\dfrac{x^2+4}{x}=x+\dfrac{4}{x}$

Seja $\dfrac{x^2+4}{x}=5$,

$x^2-5x+4=0$ (onde $x\neq 0$)

$(x-4)(x-1)=0$

$x=4,\ 1$

Portanto, os pontos comuns são:

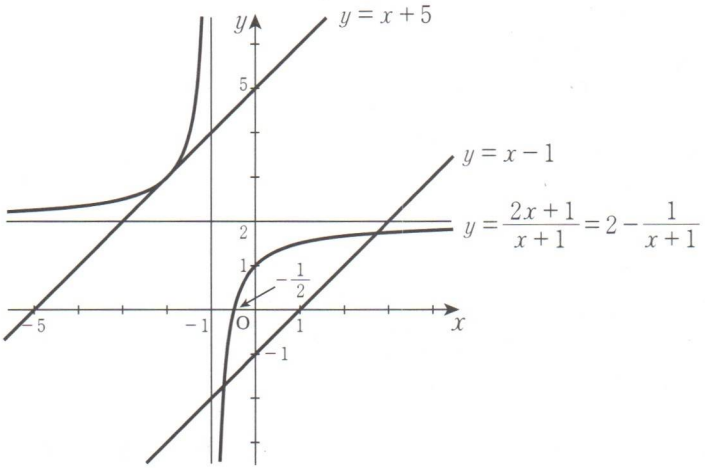
(4, 5), (1, 5)

K 142a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(16 pontos)

1. Para a função $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$:

(1) Desenhe o gráfico.



(2) Encontre os pontos comuns da função com cada uma das seguintes retas.

① $y = x - 1$

[Res.] Seja $\dfrac{2x+1}{x+1} = x - 1$,

$2x + 1 = x^2 - 1$

(onde $x \neq -1$)

$x^2 - 2x - 2 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{3}$

Portanto, os pontos comuns são:

$\mathbf{(1+\sqrt{3},\ \sqrt{3}),\ (1-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})}$

② $y = x + 5$

[Res.] Seja $\dfrac{2x+1}{x+1} = x + 5$,

$2x + 1 = (x+5)(x+1)$

(onde $x \neq -1$)

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x+2)^2 = 0$

$x = -2$

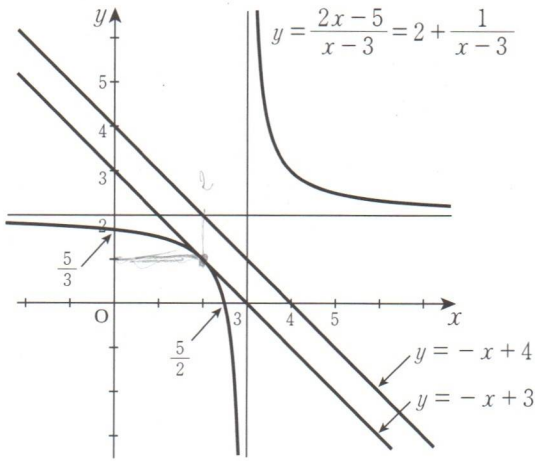
Portanto, o ponto comum é:

$\mathbf{(-2,\ 3)}$

K 142b

2. Para a função $y = \dfrac{2x-5}{x-3}$:

(1) Desenhe o gráfico.



(2) Encontre os pontos comuns da função com cada uma das seguintes retas.

① $y = -x+3$

[Res.] Seja $\dfrac{2x-5}{x-3} = -x+3$,

$2x-5 = (-x+3)(x-3)$

(onde $x \neq 3$)

$x^2-4x+4 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x = 2$

Portanto, o ponto comum é:

(2, 1)

② $y = -x+4$

[Res.] Do gráfico,

o ponto comum é:

não existe

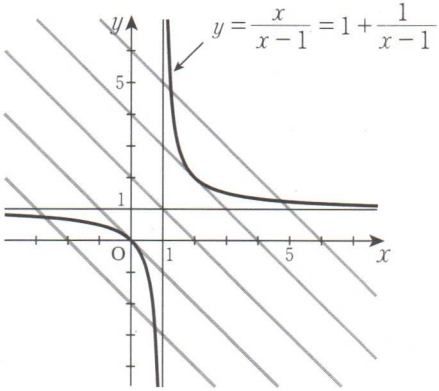
K 143a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(50 pontos)

Encontre a quantidade de pontos comuns entre os gráficos das funções dadas:

Ex.

$y = \dfrac{x}{x-1}$, $\quad y = -x+k$



[Res.] Seja $\dfrac{x}{x-1} = -x+k$,

$x = -(x-k)(x-1)$ (onde $x \neq 1$)

Exclua $x = 1$ uma vez que este valor zera o denominador.

$x^2 - kx + k = 0$

Calculando o discriminante, D, dessa equação,

$D = k^2 - 4k = k(k-4)$

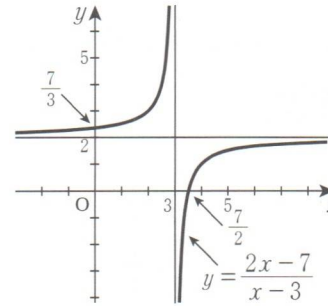
Portanto:

- Quando $D > 0$, ou seja, $k < 0$, $k > 4$,
  o número de pontos comuns é **2**.
- Quando $D = 0$, ou seja, $k = 0$, 4,
  o número de pontos comuns é **1**.
- Quando $D < 0$, ou seja, $0 < k < 4$,
  o número de pontos comuns é **0**.

Respostas: em ordem 2, 1, 0

K 143b

(1) $y=\dfrac{2x-7}{x-3}$, $y=x+k$



[Res.] Seja $\dfrac{2x-7}{x-3}=x+k$,

$2x-7=(x+k)(x-3)$

(onde $x\neq 3$)

$x^2+(k-5)x-3k+7=0$

Calculando o discriminante, D, dessa equação,

$D=(k-5)^2-4(-3k+7)=(k+3)(k-1)$

Portanto:

- Quando $D>0$, ou seja, $k<-3,\ k>1$, **o número de pontos comuns é 2.**
- Quando $D=0$, ou seja, $k=-3,\ 1$, **o número de pontos comuns é 1.**
- Quando $D<0$, ou seja, $-3<k<1$, **o número de pontos comuns é 0.**

K I44a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(33 pontos)

1. Resolva as seguintes equações fracionárias.

Ex.

$\frac{x+4}{x+2} = \frac{x}{3}$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da equação por $3(x+2)$,

$3(x+4) = x(x+2)$ (onde $x \neq -2$)

$x^2 - x - 12 = 0$

$(x-4)(x+3) = 0$

$x = 4, -3$

(1) $\frac{x+5}{x-1} = \frac{x}{2}$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da equação por $2(x-1)$,

$2(x+5) = x(x-1)$ (onde $x \neq 1$)

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$(x-5)(x+2) = 0$

$\boldsymbol{x = 5,\ -2}$

(2) $\frac{2}{x-1} = \frac{x}{x+2}$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da equação por $(x-1)(x+2)$,

$2(x+2) = x(x-1)$ (onde $x \neq 1$, $x \neq -2$)

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$\boldsymbol{x = 4,\ -1}$

2. Resolva a seguinte equação fracionária.

Ex.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{x}{x-1}$$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da equação por $(x-1)(x+1)$, ☜ $(x-1)(x+1)$ é o mínimo múltiplo comum, MMC, do denominador.

$x+1-2(x-1)=x(x+1)$ (onde $x\neq 1$, $x\neq -1$)

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3,\ 1$

$x=1$ não serve. ☜ Uma vez que o denominador é 0 quando $x=1$.

Portanto, $x=-3$

(1) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{2}{x-1}$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da equação por $(x-1)(x+3)$, ☜ $(x-1)(x+3)$ é o mínimo múltiplo comum, MMC, do denominador.

$(x+1)(x+3)+x-1=2(x+3)$ (onde $x\neq 1$, $x\neq -3$)

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$x=-4,\ 1$

$x=1$ não serve.

Portanto, $\boldsymbol{x=-4}$

Nota: Para resolver uma equação polinomial fracionária, temos sempre que verificar se o denominador não se anula com o resultado obtido.

K 145a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(25 pontos)

Resolva as seguintes equações fracionárias.

(1) $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1}{x-2}$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da equação por $(x-2)(x+1)$,

$3(x+1)-x(x-2)=(x+1)^2$ (onde $x\neq 2,\ x\neq -1$)

$2x^2-3x-2=0$

$(2x+1)(x-2)=0$

$x=-\dfrac{1}{2},\ 2$

$x=2$ não serve.

Portanto, $\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$

(2) $\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da equação por $(x+1)(x-2)$,

$(x-3)(x-2)+x(x+1)=3(x+1)$ (onde $x\neq -1,\ x\neq 2$)

$2x^2-7x+3=0$

$(2x-1)(x-3)=0$

$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ 3}$

(3) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{12}{(x-3)(x+1)}$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da equação por $(x-3)(x+1)$,

$x(x+1)-2(x-3)=12$ (onde $x\neq 3,\ x\neq -1$)

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3,\ -2$

$x=3$ não serve.

Portanto, $\boldsymbol{x=-2}$

(4) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}-\dfrac{2}{x-2}=1$

[Res.] $\dfrac{x}{(x-2)(x-1)}-\dfrac{2}{x-2}=1$

Multiplicando ambos os lados da equação por $(x-2)(x-1)$,

$x-2(x-1)=(x-2)(x-1)$ (onde $x\neq 2,\ x\neq 1$)

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0,\ 2$

$x=2$ não serve.

Portanto, $\boldsymbol{x=0}$

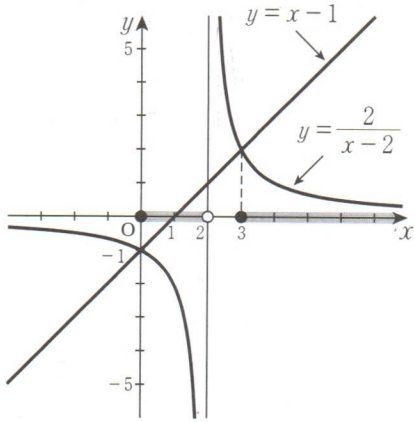
K 146a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(50 pontos)

Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

Ex.

$\dfrac{2}{x-2} \leq x-1$



Os valores de x que satisfazem a inequação $\dfrac{2}{x-2} \leq x-1$, estão sombreados no gráfico.

[Res.] Resolvendo $\dfrac{2}{x-2} = x-1$ Resolvendo a inequação original como uma equação.

$2 = (x-1)(x-2)$ (onde $x \neq 2$)

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0,\ 3$

Do gráfico,

$\boxed{0} \leq x < \boxed{2},\ x \geq \boxed{3}$

Respostas: em ordem 0, 2, 3

K 146b

(1) $\dfrac{2}{x+1} < \dfrac{1}{2}x-1$

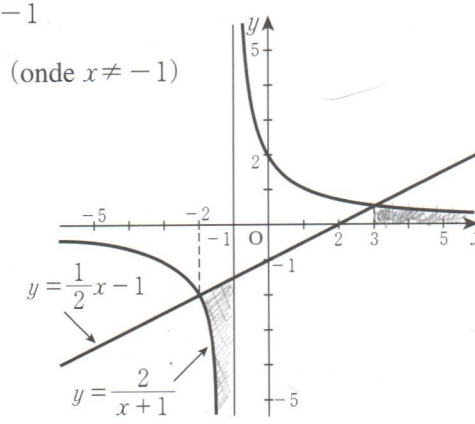
[Res.] Resolvendo $\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{1}{2}x-1$

$4 = x(x+1)-2(x+1)$ (onde $x \neq -1$)

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

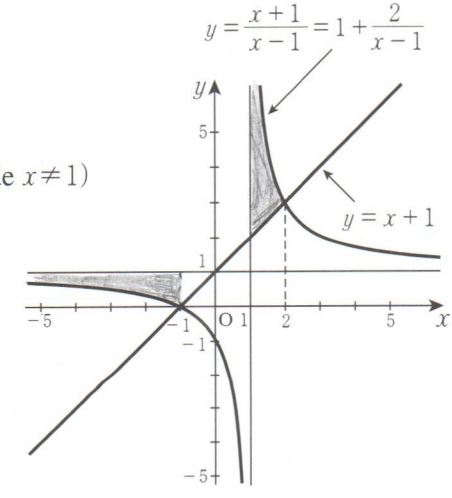
$x=3,\ -2$



Do gráfico,

$\boldsymbol{-2<x<-1,\ x>3}$

(2) $\dfrac{x+1}{x-1} \geq x+1$



[Res.] Resolvendo $\dfrac{x+1}{x-1} = x+1$

$x+1=(x+1)(x-1)$ (onde $x \neq 1$)

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$

Do gráfico,

$\boldsymbol{x \leq -1,\ 1<x \leq 2}$

Nota: Também é possível resolver as inequações acima rearranjando-as como

(1) $\dfrac{1}{2}x-1-\dfrac{2}{x+1}>0$

(2) $x+1-\dfrac{x+1}{x-1} \leq 0$

e depois trabalhando com o lado esquerdo de cada inequação.

K 147a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(33 pontos)

Resolva as seguintes inequações traçando os gráficos.

(1) $x+1 \leq \dfrac{1}{x-1}$

[Res.] Resolvendo $x+1=\dfrac{1}{x-1}$

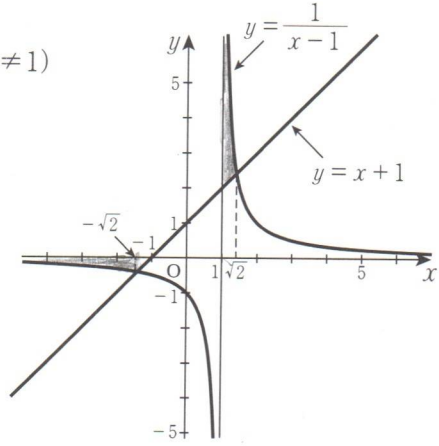
$(x+1)(x-1)=1 \quad (\text{onde } x \neq 1)$

$x^2-2=0$

$x=\pm\sqrt{2}$

Do gráfico,

$\boldsymbol{x \leq -\sqrt{2},\ 1<x \leq \sqrt{2}}$



(2) $x > \dfrac{1}{x-2}$

[Res.] Resolvendo $x=\dfrac{1}{x-2}$

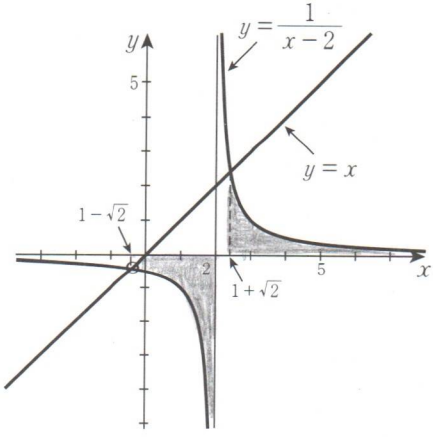
$x(x-2)=1 \quad (\text{onde } x \neq 2)$

$x^2-2x-1=0$

$x=1\pm\sqrt{2}$

Do gráfico,

$\boldsymbol{1-\sqrt{2}<x<2,\ x>1+\sqrt{2}}$



K 147b

(3) $-1 < \dfrac{7-3x}{x-1} \leq 1 \cdots ①$

[Res.]

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{7-3x}{x-1} & \cdots ② \\ \dfrac{7-3x}{x-1} \leq 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

Para ②,

resolvendo $-1 = \dfrac{7-3x}{x-1}$,

$-x+1 = 7-3x$ (onde $x \neq 1$)

$x = 3$

Do gráfico,

$1 < x < 3 \cdots ④$

Para ③,

resolvendo $\dfrac{7-3x}{x-1} = 1$,

$7-3x = x-1$ (onde $x \neq 1$)

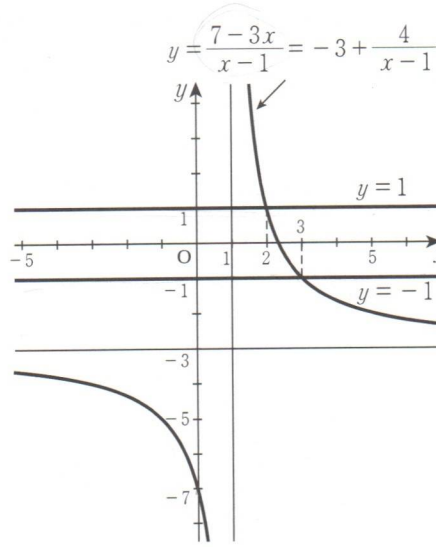
$x = 2$

Do gráfico,

$x < 1,\ x \geq 2 \cdots ⑤$

De ④ e ⑤, a solução para ① é:

$\boldsymbol{2 \leq x < 3}$



K 148a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(50 pontos)

1. Resolva as seguintes inequações, utilizando o método apresentado no exemplo.

Ex.

$\dfrac{(x+1)(x-2)}{x} \leq 0$

[Res.] Reescrevendo, $x-1-\dfrac{2}{x} \leq 0$,

$x-1 \leq \dfrac{2}{x}$

Resolvendo $x-1=\dfrac{2}{x}$,

$x(x-1)=2$ (onde $x \neq 0$)

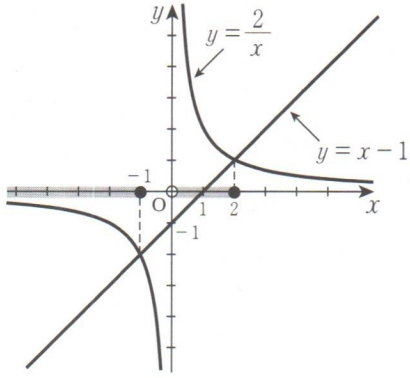
$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$

Do gráfico,

$x \leq -1,\ 0<x \leq 2$



(1) $\dfrac{(x+3)(x-1)}{x} \geq 0$

[Res.] Reescrevendo, $x+2-\dfrac{3}{x} \geq 0$,

$x+2 \geq \dfrac{3}{x}$

Resolvendo $x+2=\dfrac{3}{x}$,

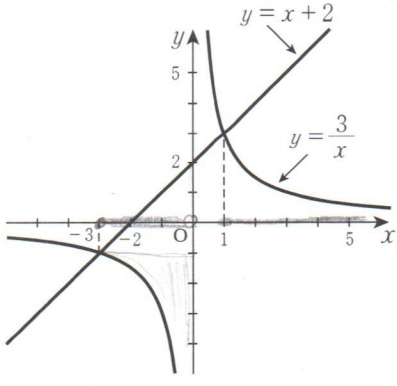
$x^2+2x-3=0$ (onde $x \neq 0$)

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3,\ 1$

Do gráfico,

$\boldsymbol{-3 \leq x < 0,\ x \geq 1}$



2. Resolva as seguintes inequações, utilizando o método apresentado no exemplo.

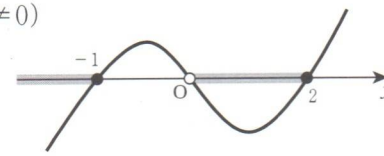
Ex.

$\dfrac{(x+1)(x-2)}{x} \leq 0$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da inequação por x^2,

Aqui, multiplicamos por x^2 ao invés de x, pois, x^2 é positivo para todos os valores de x (exceto $x=0$).

$x(x+1)(x-2) \leq 0 \quad (\text{onde } x \neq 0)$



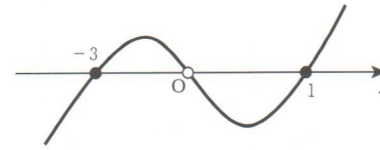
Do gráfico,

$x \leq -1,\ 0 < x \leq 2$

(1) $\dfrac{(x+3)(x-1)}{x} \geq 0$

[Res.] Multiplicando ambos os lados da inequação por x^2,

$x(x+3)(x-1) \geq 0 \quad (\text{onde } x \neq 0)$



Do gráfico,

$\boldsymbol{-3 \leq x < 0,\ x \geq 1}$

K 149a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(33 pontos)

Resolva as seguintes inequações.

Ex.

$$\frac{5}{x+2} \geq \frac{2}{x-1}$$

[Res.] $\dfrac{5}{x+2} - \dfrac{2}{x-1} \geq 0$

$$\frac{5(x-1)-2(x+2)}{(x+2)(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{3(x-3)}{(x+2)(x-1)} \geq 0$$

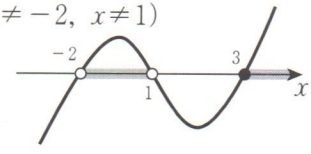
Multiplicando ambos os lados por $(x+2)^2(x-1)^2$,

O quadrado do denominador é $(x+2)^2(x-1)^2$.

$3(x-3)(x+2)(x-1) \geq 0$ (onde $x \neq -2,\ x \neq 1$)

Do gráfico,

$-2 < x < 1,\ x \geq 3$



(1) $\dfrac{2}{x-2} \leq \dfrac{1}{x+1}$

[Res.] $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x+1} \leq 0$

$$\frac{2(x+1)-(x-2)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

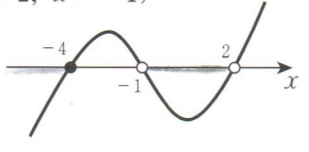
$$\frac{x+4}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

Multiplicando ambos os lados por $(x-2)^2(x+1)^2$,

$(x+4)(x-2)(x+1) \leq 0$ (onde $x \neq 2,\ x \neq -1$)

Do gráfico,

$\boldsymbol{x \leq -4,\ -1 < x < 2}$



K 149b

(2) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-4}\geq 0$

[Res.] $\dfrac{x-4+2(x+2)}{(x+2)(x-4)}\geq 0$

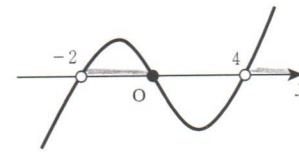
$\dfrac{3x}{(x+2)(x-4)}\geq 0$

Multiplicando ambos os lados por $(x+2)^2(x-4)^2$,

$3x(x+2)(x-4)\geq 0$ (onde $x\neq -2,\ x\neq 4$)

Do gráfico,

$-2<x\leq 0,\ x>4$



(3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-5}\leq \dfrac{2}{(x+1)(x-5)}$

[Res.] $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2}{(x+1)(x-5)}\leq 0$

$\dfrac{x-5+x+1-2}{(x+1)(x-5)}\leq 0$

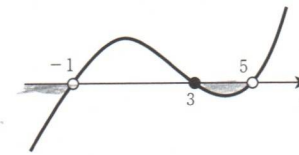
$\dfrac{2(x-3)}{(x+1)(x-5)}\leq 0$

Multiplicando ambos os lados por $(x+1)^2(x-5)^2$,

$2(x-3)(x+1)(x-5)\leq 0$ (onde $x\neq -1,\ x\neq 5$)

Do gráfico,

$x<-1,\ 3\leq x<5$



K 150a KUMON Equações e Inequações Fracionárias

(33 pontos)

1. Encontre o valor da constante k para que o gráfico de $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tangencie a reta $y = -x+k$ (ou seja, para que os dois gráficos tenham exatamente um ponto comum).

[Res.] Seja $\dfrac{2x+1}{x-1} = -x+k$,

$2x+1 = (-x+k)(x-1)$ (onde $x \neq 1$)

$x^2+(1-k)x+k+1 = 0$

Calculando o discriminante, D, dessa equação,

$D = (1-k)^2-4(k+1) = k^2-6k-3 = 0$

Portanto, $\boldsymbol{k = 3 \pm 2\sqrt{3}}$

2. Resolva a equação fracionária.

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x^2+2x-3}$$

[Res.] $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{4}{(x+3)(x-1)}$

Multiplicando ambos os lados por $(x+3)(x-1)$,

$x(x+3)-2(x-1) = 4$ (onde $x \neq -3$, $x \neq 1$)

$x^2+x-2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2, 1$

$x = 1$ não serve.

Portanto, $\boldsymbol{x = -2}$

K 150b

3. Resolva a inequação fracionária.

$$x \le \frac{2}{x-1}$$

[Res.] $x - \frac{2}{x-1} \le 0$

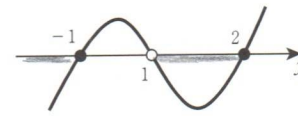
$$\frac{x(x-1)-2}{x-1} \le 0$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-1} \le 0$$

$(x+1)(x-2)(x-1) \le 0$ (onde $x \neq 1$)

De gráfico,

$\boldsymbol{x \le -1,\ 1 < x \le 2}$



[Do gráfico de $y = x$ e $y = \frac{2}{x-1}$, $\boldsymbol{x \le -1,\ 1 < x \le 2}$]

Vamos tentar!

Observando a inequação em K148, $\frac{(x+1)(x-2)}{x} \le 0$, podemos resolvê-la utilizando um método alternativo.

[Res.] (i) Quando $x < 0$

Multiplicando ambos os lados por x,

$(x+1)(x-2) \ge 0$

$x \le -1,\ x \ge 2$

Uma vez que $x < 0$, $x \le$ **−1**

Quando multiplicamos ambos os lados por um número negativo, o sinal da inequação é invertido.

(ii) Quando $x > 0$

Multiplicando ambos os lados por x,

$(x+1)(x-2) \le 0$

$-1 \le x \le 2$

Uma vez que $x > 0$, **0** $< x \le 2$

Quando multiplicamos ambos os lados por um número positivo, o sinal da inequação não muda.

De (i) e (ii), $x \le$ **−1**, **0** $< x \le 2$

Respostas: em ordem −1, 0, −1, 0

K 151a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

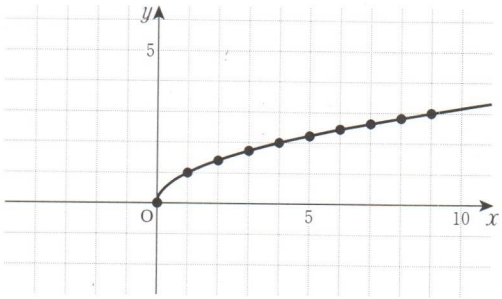
(33 pontos)

Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

Ex.

$y = \sqrt{x}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y			0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{2}$	3



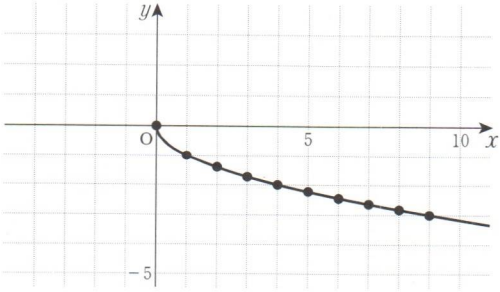
Domínio: $x \geq 0$

Imagem: $y \geq 0$

Nota: Quando $x < 0$, y não está definido.

(1) $y = -\sqrt{x}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y			**0**	**-1**	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	**-2**	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{7}$	$-2\sqrt{2}$	**-3**



Domínio: $x \geq$ **0**

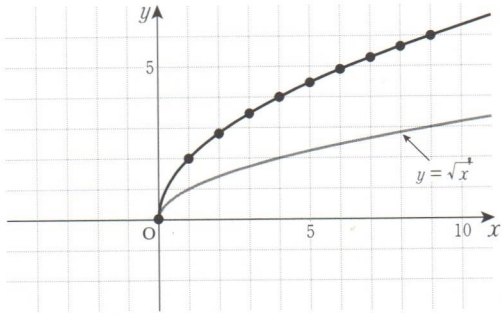
Imagem: $y \leq 0$

[Referência] $\sqrt{2} = 1,41...$, $\sqrt{3} = 1,73...$, $\sqrt{5} = 2,23...$, $\sqrt{7} = 2,64...$

K151b

(2) $y = 2\sqrt{x}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y			0	**2**	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	**4**	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{7}$	$4\sqrt{2}$	**6**

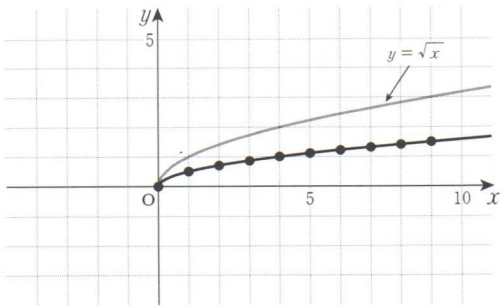


Domínio: $x \geq$ **0**

Imagem: $y \geq$ **0**

(3) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y			**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$



Domínio: $x \geq$ **0**

Imagem: $y \geq$ **0**

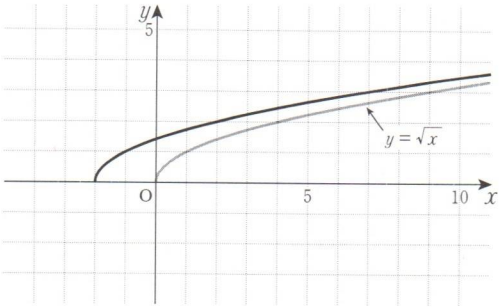
K I 52a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

(25 pontos)

Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

(1) $y=\sqrt{x+2}$

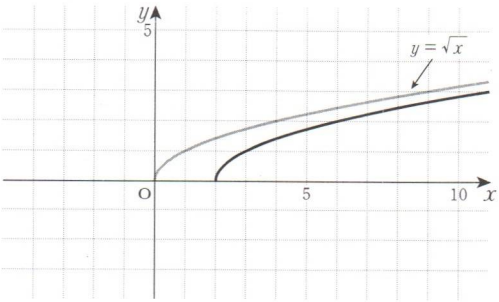
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y			**0**	**1**	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	**2**	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{2}$	**3**



Domínio: $x \geq -2$

Imagem: $y \geq$ **0**

(2) $y=\sqrt{x-2}$



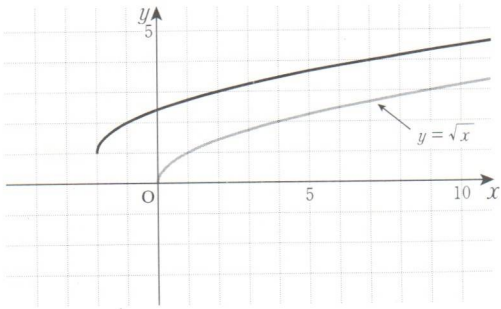
Domínio: $\boldsymbol{x \geq 2}$

Imagem: $\boldsymbol{y \geq 0}$

[Referência] $\sqrt{2}=1,41...$, $\sqrt{3}=1,73...$, $\sqrt{5}=2,23...$, $\sqrt{7}=2,64...$

K 152b

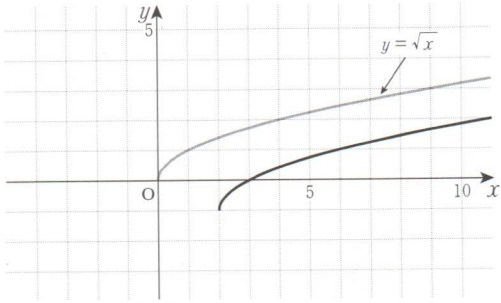
(3) $y=\sqrt{x+2}+1$



Domínio: $\boldsymbol{x \geq -2}$

Imagem: $\boldsymbol{y \geq 1}$

(4) $y=\sqrt{x-2}-1$



Domínio: $\boldsymbol{x \geq 2}$

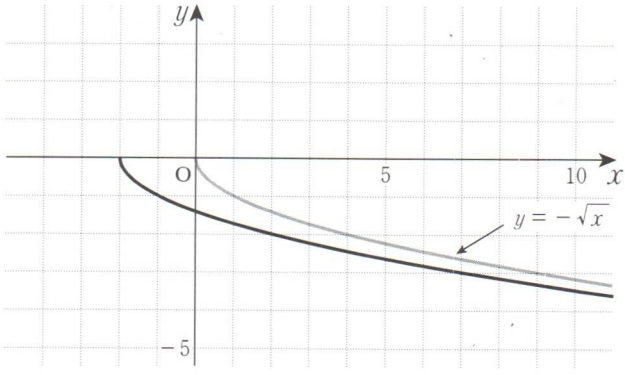
Imagem: $\boldsymbol{y \geq -1}$

K I 53a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

(25 pontos)

Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

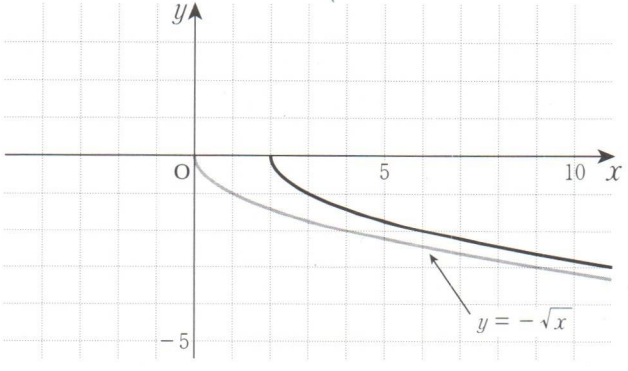
(1) $y = -\sqrt{x+2}$



Domínio: $x \geq$ **-2**

Imagem: $y \leq 0$

(2) $y = -\sqrt{x-2}$

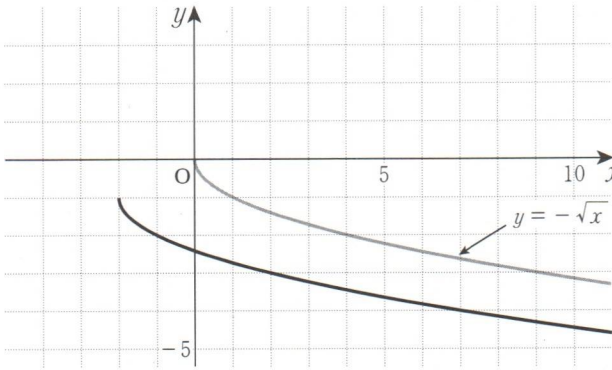


Domínio: **$x \geq 2$**

Imagem: **$y \leq 0$**

K 153b

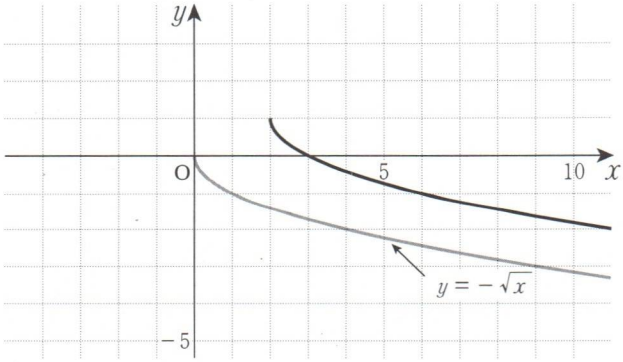
(3) $y = -\sqrt{x+2} - 1$



Domínio: $\boldsymbol{x \geq -2}$

Imagem: $y \leq -1$

(4) $y = -\sqrt{x-2} + 1$



Domínio: $\boldsymbol{x \geq 2}$

Imagem: $\boldsymbol{y \leq 1}$

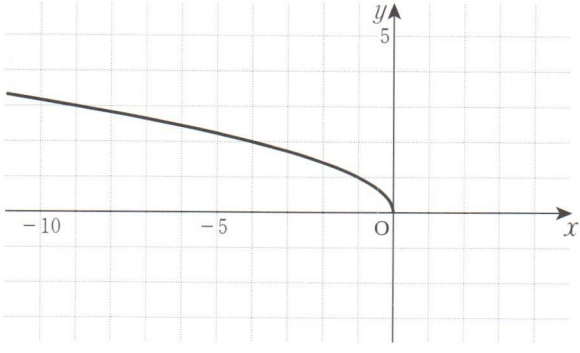
K 154a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

(25 pontos)

Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

(1) $y=\sqrt{-x}$

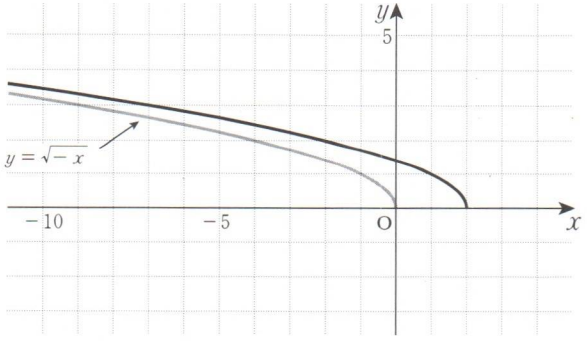
x	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	3	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0		



Domínio: $x \leq 0$

Imagem: $y \geq 0$

(2) $y=\sqrt{-x+2}$

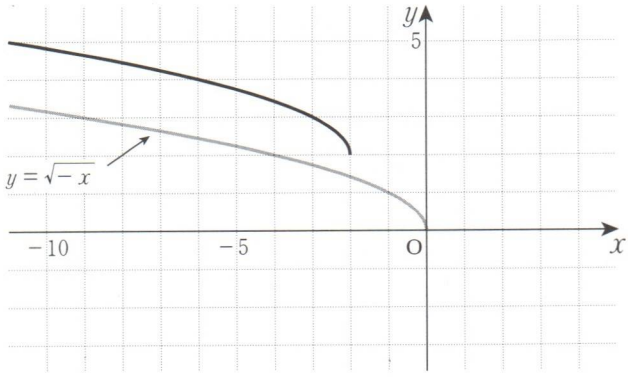


Domínio: $x \leq 2$

Imagem: $\boxed{y \geq 0}$

K 154b

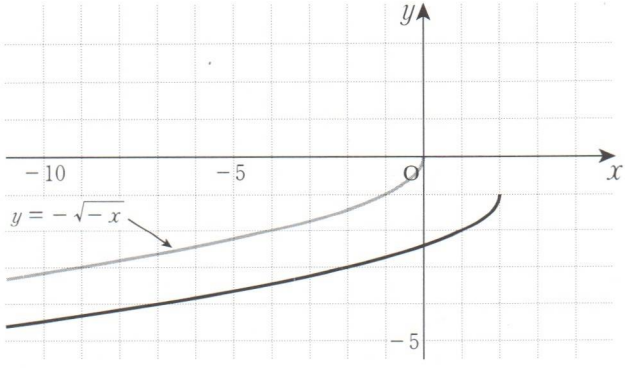
(3) $y = \sqrt{-x-2} + 2$



Domínio: $\boldsymbol{x \leq -2}$

Imagem: $\boldsymbol{y \geq 2}$

(4) $y = -\sqrt{-x+2} - 1$



Domínio: $\boldsymbol{x \leq 2}$

Imagem: $\boldsymbol{y \leq -1}$

K 155a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

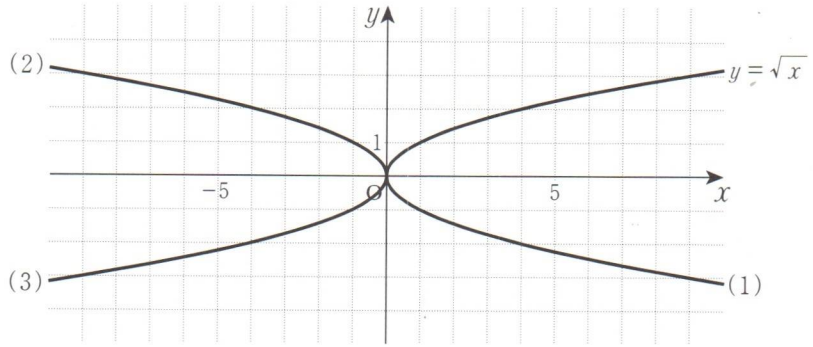
(7 pontos)

1. Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

(1) $y = -\sqrt{x}$

(2) $y = \sqrt{-x}$

(3) $y = -\sqrt{-x}$



2. Complete os quadros em branco abaixo usando o gráfico acima.

Ex. $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ são simétricas em relação ao [eixo x].

(1) $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{-x}$ são simétricas em relação ao [**eixo y**].

(2) $y = \sqrt{-x}$ e $y = -\sqrt{-x}$ são simétricas em relação ao [**eixo x**].

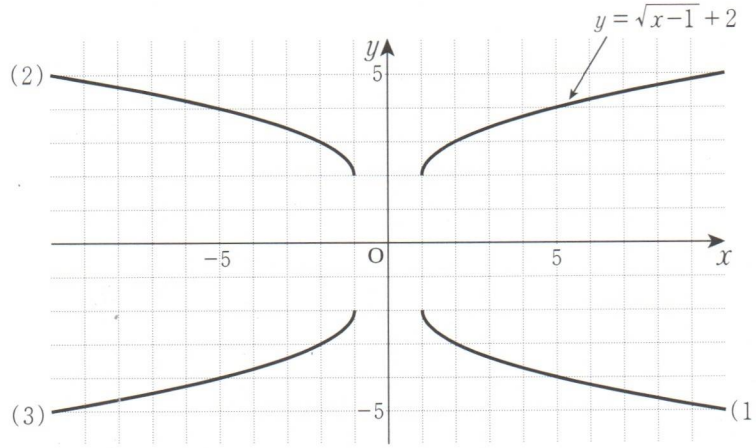
(3) $y = -\sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{-x}$ são simétricas em relação ao [**eixo y**].

3. Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

(1) $y = -\sqrt{x-1} - 2$

(2) $y = \sqrt{-(x+1)} + 2$

(3) $y = -\sqrt{-(x+1)} - 2$



4. Complete os quadros em branco abaixo usando o gráfico acima.

(1) $y = \sqrt{x-1} + 2$ e $y = -\sqrt{x-1} - 2$ são simétricas em relação ao **eixo *x***.

(2) $y = \sqrt{x-1} + 2$ e $y = \sqrt{-(x+1)} + 2$ são simétricas em relação ao **eixo *y***.

(3) $y = \sqrt{-(x+1)} + 2$ e $y = -\sqrt{-(x+1)} - 2$ são simétricas em relação ao **eixo *x***.

(4) $y = -\sqrt{x-1} - 2$ e $y = -\sqrt{-(x+1)} - 2$ são simétricas em relação ao **eixo *y***.

K 156a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

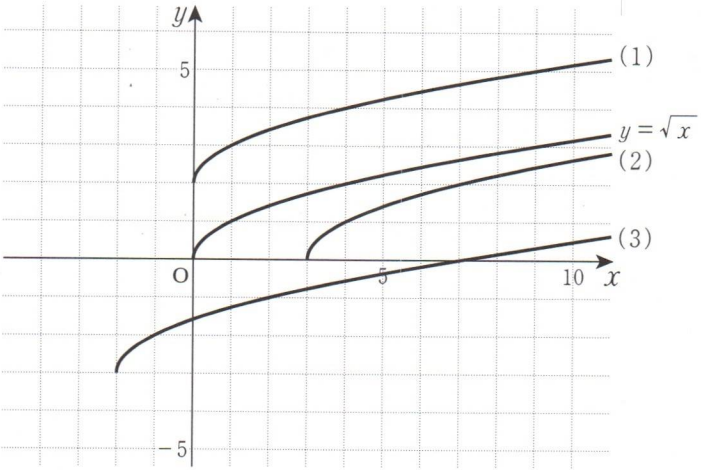
(8 pontos)

1. Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

(1) $y=\sqrt{x}+2$

(2) $y=\sqrt{x-3}$

(3) $y=\sqrt{x+2}-3$



2. Complete os quadros em branco abaixo usando o gráfico acima.

(1) $y=\sqrt{x}+2$ é um deslocamento de $y=\sqrt{x}$, [2] unidade(s) ao longo do eixo y.

(2) $y=\sqrt{x-3}$ é um deslocamento de $y=\sqrt{x}$, [3] unidade(s) ao longo do eixo x.

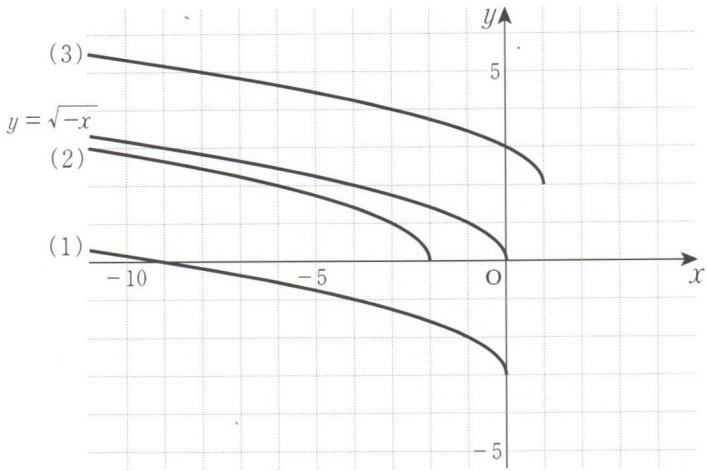
(3) $y=\sqrt{x+2}-3$ é um deslocamento de $y=\sqrt{x}$, [−2] unidade(s) ao longo do eixo x, e [−3] unidade(s) ao longo do eixo y.

3. Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

(1) $y=\sqrt{-x}-3$

(2) $y=\sqrt{-(x+2)}$

(3) $y=\sqrt{-(x-1)}+2$



4. Complete os quadros em branco abaixo usando o gráfico acima.

(1) $y=\sqrt{-x}-3$ é um deslocamento de $y=\sqrt{-x}$, $\boxed{-3}$ unidade(s) ao longo do eixo y.

(2) $y=\sqrt{-(x+2)}$ é um deslocamento de $y=\sqrt{-x}$, $\boxed{-2}$ unidade(s) ao longo do eixo x.

(3) $y=\sqrt{-(x-1)}+2$ é um deslocamento de $y=\sqrt{-x}$, $\boxed{1}$ unidade(s) ao longo do eixo x, e $\boxed{2}$ unidade(s) ao longo do eixo y.

K 157a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

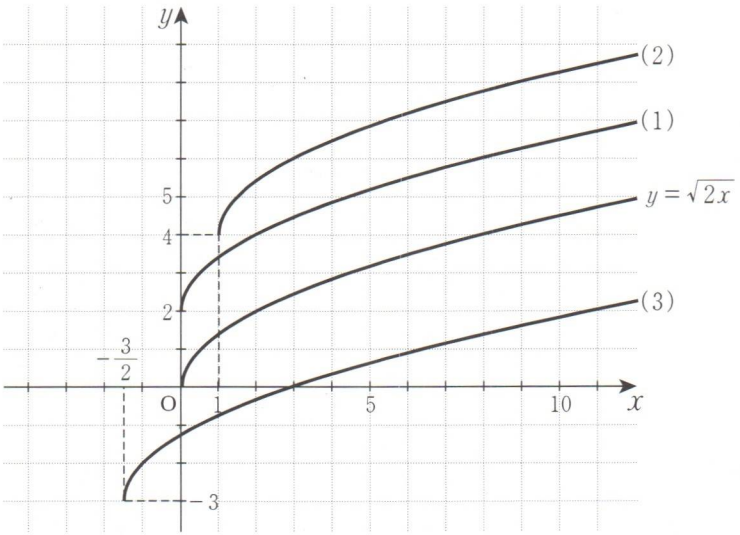
(8 pontos)

1. Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

(1) $y=\sqrt{2x}+2$

(2) $y=\sqrt{2x-2}+4=\sqrt{2(x-1)}+4$

(3) $y=\sqrt{2x+3}-3=\sqrt{2\left(x+\boxed{\frac{3}{2}}\right)}-3$



2. Complete os quadros em branco abaixo usando o gráfico acima.

(1) $y=\sqrt{2x}+2$ é um deslocamento de $y=\sqrt{2x}$, $\boxed{2}$ unidade(s) ao longo do eixo y.

(2) $y=\sqrt{2x-2}+4$ é um deslocamento de $y=\sqrt{2x}$, 1 unidade ao longo do eixo x, e $\boxed{4}$ unidade(s) ao longo do eixo y.

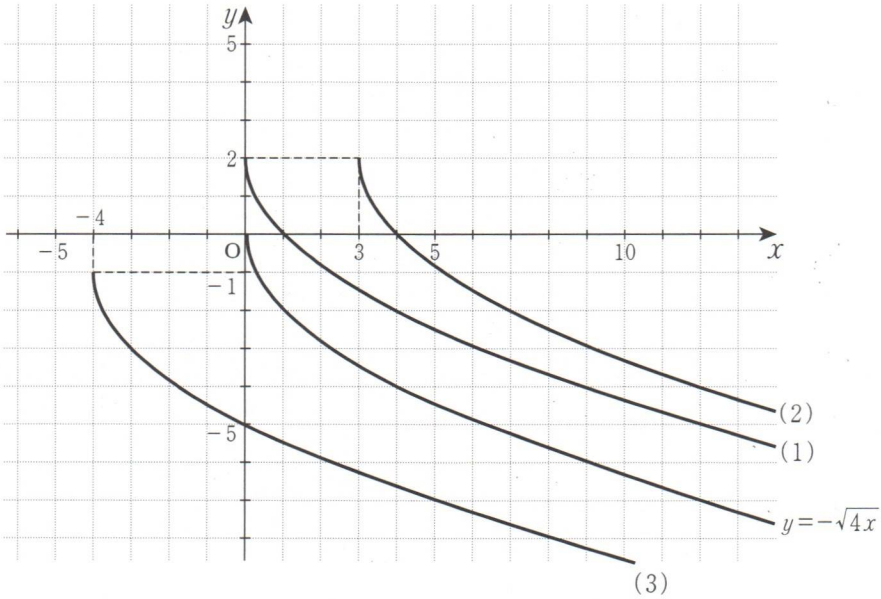
(3) $y=\sqrt{2x+3}-3$ é um deslocamento de $y=\sqrt{2x}$, $\boxed{-\frac{3}{2}}$ unidade(s) ao longo do eixo x, e $\boxed{-3}$ unidade(s) ao longo do eixo y.

3. Trace os gráficos das seguintes funções irracionais.

(1) $y = -\sqrt{4x} + 2$

(2) $y = -\sqrt{4x-12} + 2 = -\sqrt{4(x-\boxed{3})} + 2$

(3) $y = -\sqrt{4x+16} - 1 = \mathbf{-\sqrt{4(x+4)} - 1}$



4. Complete os quadros em branco abaixo usando o gráfico acima.

(1) $y = -\sqrt{4x} + 2$ é um deslocamento de $y = -\sqrt{4x}$, $\boxed{2}$ unidade(s) ao longo do eixo y.

(2) $y = -\sqrt{4x-12} + 2$ é um deslocamento de $y = -\sqrt{4x}$, $\boxed{3}$ unidade(s) ao longo do eixo x, e $\boxed{2}$ unidade(s) ao longo do eixo y

(3) $y = -\sqrt{4x+16} - 1$ é um deslocamento de $y = -\sqrt{4x}$, $\boxed{-4}$ unidade(s) ao longo do eixo x, e $\boxed{-1}$ unidade(s) ao longo do eixo y.

Note: Uma função irracional na forma $y = \sqrt{k(x-p)} + q$ é um deslocamento de $y = \sqrt{kx}$, p unidades ao longo do eixo x, e q unidades ao longo do eixo y.

Uma função irracional na forma $y = -\sqrt{k(x-p)} + q$ é um deslocamento de $y = -\sqrt{kx}$, p unidades ao longo do eixo x, e q unidades ao longo do eixo y.

K 158a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

(8 pontos)

1. Descreva como as seguintes funções foram deslocadas de $y=\sqrt{-x}$.

(1) $y=\sqrt{-x+1}-2=\sqrt{-(x-1)}-2$

1 unidade ao longo do eixo x, e $\boxed{-2}$ unidade(s) ao longo do eixo y

(2) $y=\sqrt{-x-3}=\sqrt{-(x+3)}$

-3 unidades ao longo do eixo x

(3) $y=\sqrt{-x+2}+3=\sqrt{-(x-2)}+3$

2 unidades ao longo do eixo x, e 3 unidades ao longo do eixo y

2. Descreva como as seguintes funções foram deslocadas de $y=\sqrt{5x}$.

(1) $y=\sqrt{5x-10}+5=\sqrt{5(x-2)}+5$

2 unidades ao longo do eixo x, e 5 unidades ao longo do eixo y

(2) $y=\sqrt{5x}-10$

-10 unidades ao longo do eixo y

(3) $y=\sqrt{5x+2}-3=\sqrt{5\left(x+\frac{2}{5}\right)}-3$

$-\frac{2}{5}$ unidades ao longo do eixo x, e -3 unidades ao longo do eixo y

3. Obtenha as equações das curvas quando $y=\sqrt{x}$ é deslocada em:

(1) 3 unidades ao longo do eixo y

$$\boldsymbol{y=\sqrt{x}+3}$$

(2) -2 unidades ao longo do eixo x

$$\boldsymbol{y=\sqrt{x+2}}$$

(3) 2 unidades ao longo do eixo x, e -3 unidades ao longo do eixo y

$$\boldsymbol{y=\sqrt{x-2}-3}$$

4. Obtenha as equações das curvas quando $y=\sqrt{-3x}$ é deslocada em:

(1) -1 unidade ao longo do eixo y

$$\boldsymbol{y=\sqrt{-3x}-1}$$

(2) 1 unidade ao longo do eixo x

$$\boldsymbol{y=\sqrt{-3(x-1)}=\sqrt{-3x+3}}$$

(3) $-\frac{1}{3}$ unidades ao longo do eixo x, e 5 unidades ao longo do eixo y

$$\boldsymbol{y=\sqrt{-3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+5=\sqrt{-3x-1}+5}$$

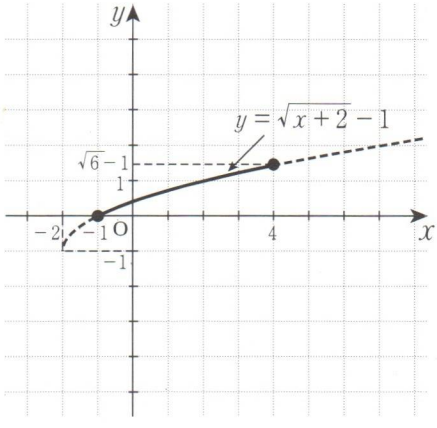
K 159a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

(33 pontos)

Trace os gráficos das funções irracionais e encontre os valores máximo e mínimo para cada domínio dado.

Ex.

$f(x) = \sqrt{x+2} - 1 \quad (-1 \leq x \leq 4)$



[Res.]

$f(-1) = \sqrt{1} - 1 = 0$

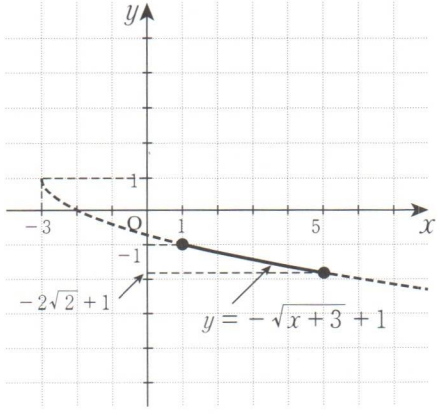
$f(4) = \sqrt{6} - 1$

Do gráfico:

Valor máximo: $f(4) = \sqrt{6} - 1$

Valor mínimo: $f(-1) = 0$

(1) $f(x) = -\sqrt{x+3} + 1 \quad (1 \leq x \leq 5)$



[Res.]

$f(1) = -\sqrt{4} + 1 = -1$

$f(5) = -\sqrt{8} + 1 = -2\sqrt{2} + 1$

Do gráfico:

Valor máximo:

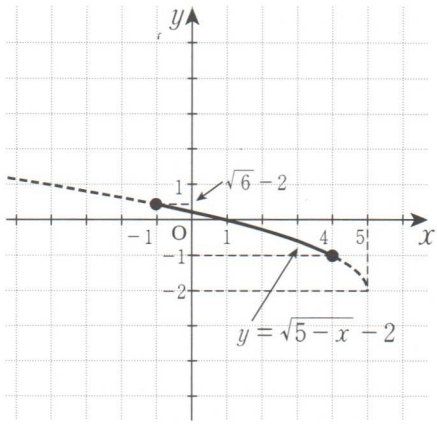
$\boldsymbol{f(1) = -1}$

Valor mínimo:

$\boldsymbol{f(5) = -2\sqrt{2} + 1}$

K 159b

(2) $f(x)=\sqrt{5-x}-2 \ (-1\leq x\leq 4)$



[Res.]

$f(-1)=\sqrt{6}-2$

$f(4)=\sqrt{1}-2=-1$

Do gráfico:

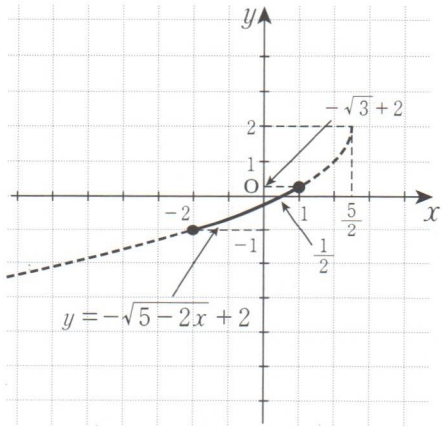
Valor máximo:

$\boldsymbol{f(-1)=\sqrt{6}-2}$

Valor mínimo:

$\boldsymbol{f(4)=-1}$

(3) $f(x)=-\sqrt{5-2x}+2 \ (-2\leq x\leq 1)$



[Res.]

$f(-2)=-\sqrt{9}+2=-1$

$f(1)=-\sqrt{3}+2$

Do gráfico:

Valor máximo:

$\boldsymbol{f(1)=-\sqrt{3}+2}$

Valor mínimo:

$\boldsymbol{f(-2)=-1}$

K 160a KUMON Gráficos de Funções Irracionais

(12 pontos)

1. Para cada função, associe as letras (A)~(F) do gráfico correspondente.

(1) $y=\sqrt{x-1}-2$ … **(D)**

(2) $y=-\sqrt{x-1}+2$ … **(C)**

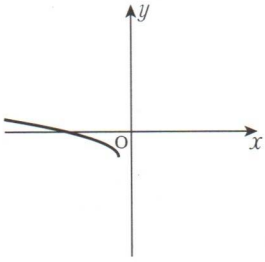
(3) $y=\sqrt{2x+2}+1$ … **(F)**

(4) $y=-\sqrt{-x+1}+2$ … **(B)**

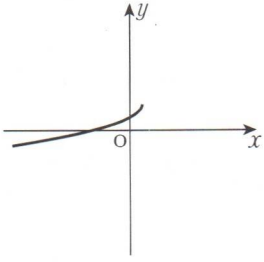
(5) $y=-\sqrt{2x-2}-1$ … **(E)**

(6) $y=\sqrt{-x-1}-2$ … **(A)**

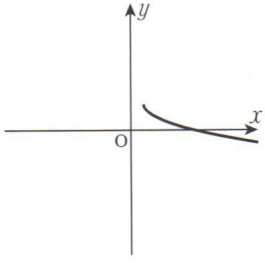
(A)



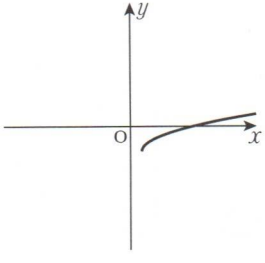
(B)



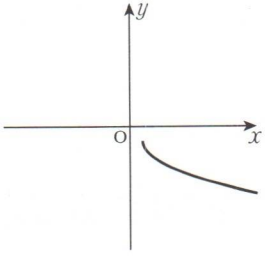
(C)



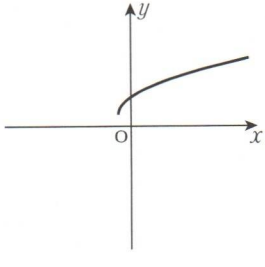
(D)



(E)



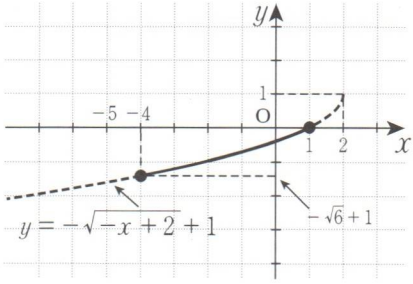
(F)



2. Obtenha a equação da curva quando $y=\sqrt{2x}$ é deslocada 1 unidade ao longo do eixo x, e -2 unidades ao longo do eixo y.

[Res.] $\boldsymbol{y=\sqrt{2(x-1)}-2=\sqrt{2x-2}-2}$

3. Trace o gráfico da função irracional $f(x)=-\sqrt{-x+2}+1$ $(-4\le x\le 1)$, depois encontre os valores máximo e mínimo no domínio dado.



[Res.]

$f(-4)=-\sqrt{6}+1$

$f(1)=0$

Do gráfico:

Valor máximo:

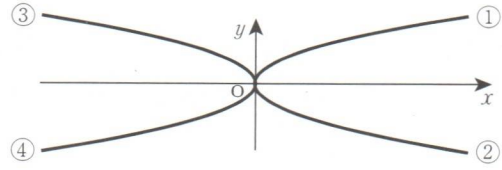
$\boldsymbol{f(1)=0}$

Valor mínimo:

$\boldsymbol{f(-4)=-\sqrt{6}+1}$

Sumário

- Dada uma função irracional na forma $y=\sqrt{k(x-p)}+q$, o domínio e a imagem da função são as seguintes:
  Quando $k>0$, Domínio: $x\ge p$, Imagem: $y\ge q$
  Quando $k<0$, Domínio: $x\le p$, Imagem: $y\ge q$
- Uma função irracional na forma $y=\sqrt{k(x-p)}+q$ é o deslocamento de $y=\sqrt{kx}$, p unidades ao longo do eixo x, e q unidades ao longo do eixo y.
- Os gráficos de algumas funções irracionais estão traçados abaixo.
  ① $y=\sqrt{x}$, ② $y=-\sqrt{x}$, ③ $y=\sqrt{-x}$, ④ $y=-\sqrt{-x}$

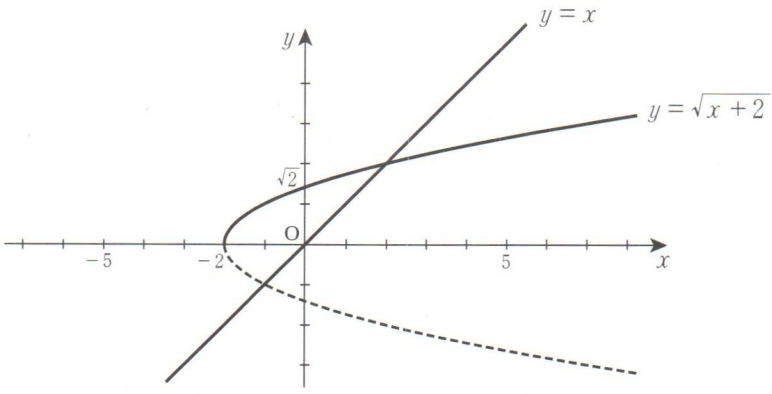


K 161a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(50 pontos)

Ex.

Trace os gráficos de $y = \sqrt{x+2}$ e $y = x$, e encontre os pontos comuns.



[Res.] Fazendo $\sqrt{x+2} = x$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x+2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2,\ -1$

A partir do gráfico, $x =$ [−1] é uma solução incompatível.

O gráfico de $y = x$ e $y = \sqrt{x+2}$ não tem um ponto comum em $x = -1$. (Veja a nota de rodapé.)

Portanto, o ponto comum é ([2] , [2]).

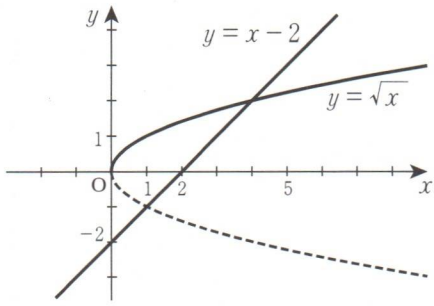
Respostas: na ordem −1, 2, 2

Nota: $x = -1$, é a coordenada x do ponto de intersecção entre $y = x$ e $y = -\sqrt{x+2}$ e estamos procurando a intersecção entre, $y = x$ e $y = \sqrt{x+2}$.

K161b

Trace o gráfico de cada par de funções, e encontre os pontos comuns.

(1) $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$



[Res.]
Fazendo $\sqrt{x}=x-2$
Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x=(x-2)^2$

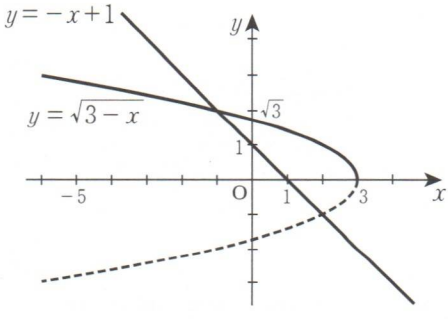
$x^2-5x+4=0$

$(x-4)(x-1)=0$

$x=4,\ 1$

A partir do gráfico, $x=1$ é solução incompatível.
Portanto, o ponto comum é **(4, 2)**.

(2) $y=\sqrt{3-x}$, $y=-x+1$



[Res.]
Fazendo $\sqrt{3-x}=-x+1$
Elevando ambos os membros ao quadrado,

$3-x=(-x+1)^2$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$

A partir do gráfico, $x=2$ é solução incompatível.
Portanto, o ponto comum é **(−1, 2)**.

K 162a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(33 pontos)

Em cada questão, trace o gráfico e use-o para resolver a equação irracional.

Ex.

$\sqrt{4-x} = x-2$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$4-x=(x-2)^2$

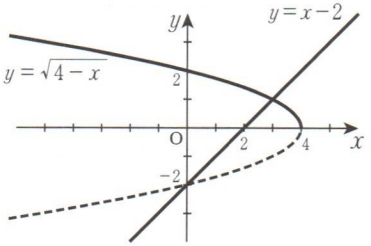
$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$

A partir do gráfico, $x=0$ é solução incompatível.

Portanto, $x=3$



Nota: Quando traçar o gráfico, encontre primeiro as intersecções com os eixos x e y.

(1) $-\sqrt{x+3} = x+1$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x+3=(x+1)^2$

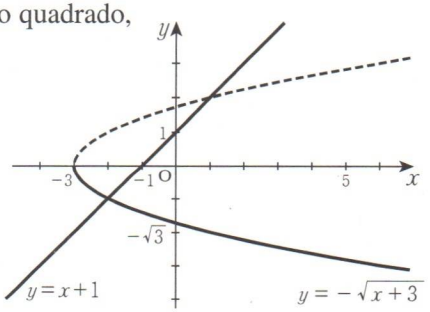
$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x=-2,\ 1$

A partir do gráfico, $x=1$ é solução incompatível.

Portanto, $\boldsymbol{x=-2}$



(2) $\sqrt{x-2}=x-2$ (Existem duas soluções.)

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x-2=(x-2)^2$

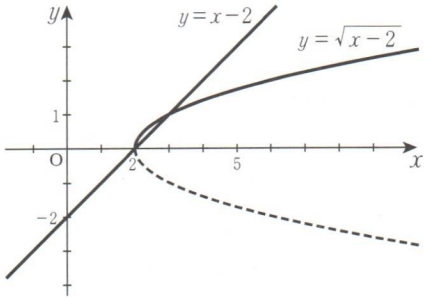
$x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

$x=3,\ 2$

A partir do gráfico, ambas as soluções se aplicam.

Portanto, $\boldsymbol{x=3,\ 2}$



(3) $-\sqrt{5-x}=x+1$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$5-x=(x+1)^2$

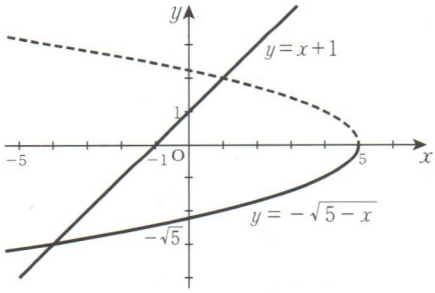
$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$x=-4,\ 1$

A partir do gráfico, $x=1$ é solução incompatível.

Portanto, $\boldsymbol{x=-4}$



K 163a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(25 pontos)

Em cada questão, trace o gráfico e use-o para resolver a equação irracional.

(1) $\sqrt{2x+5} = x+1$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

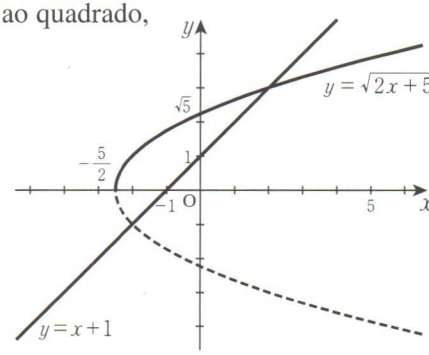
$2x+5 = (x+1)^2$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

A partir do gráfico, $x = -2$ é solução incompatível.

Portanto, $\boldsymbol{x = 2}$



(2) $\sqrt{2x+3} = -2x+3$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$2x+3 = (-2x+3)^2$

$4x^2 - 14x + 6 = 0$

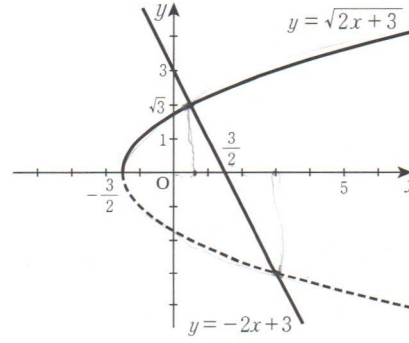
$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$(2x-1)(x-3) = 0$

$x = \frac{1}{2}, 3$

A partir do gráfico, $x = 3$ é solução incompatível.

Portanto, $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$



(3) $\sqrt{-2x+1} = -\frac{1}{2}(x-2)$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$-2x+1 = \frac{(x-2)^2}{4}$$

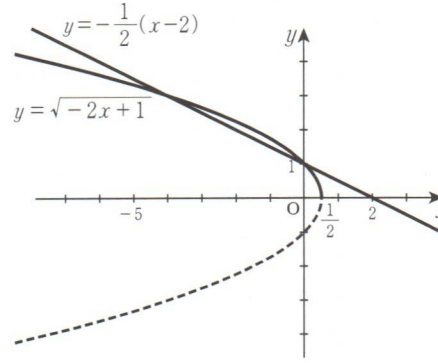
$$x^2+4x=0$$

$$x(x+4)=0$$

$$x=0,\ -4$$

Do gráfico, ambas as soluções se aplicam.

Portanto, $\boldsymbol{x=0,\ -4}$



(4) $-\sqrt{3x-2} = x-2$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$3x-2=(x-2)^2$$

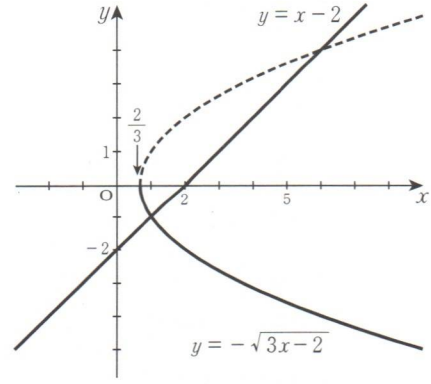
$$x^2-7x+6=0$$

$$(x-6)(x-1)=0$$

$$x=6,\ 1$$

A partir do gráfico, $x=6$ é solução incompatível.

Portanto, $\boldsymbol{x=1}$



K 164a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(33 pontos)

Ex.

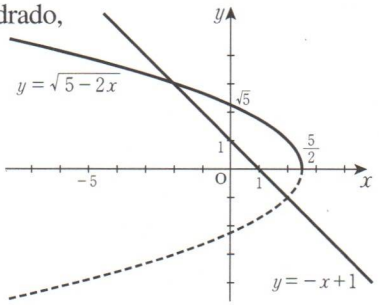
Resolva a equação irracional $\sqrt{5-2x} = -x+1$, usando os seguintes métodos.

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$5-2x=(-x+1)^2$

$x^2=4$

$x=\pm 2$



[Res. 1] A partir do gráfico, $x=2$ é solução incompatível.

Portanto, $x=-2$

[Res. 2] Substituindo na equação original,

(i) Quando $x=2$, o lado esquerdo, LE $=1$, o lado direito, LD $=-1$

Portanto, $x=2$ é solução incompatível. Uma vez que LE $\neq$ LD

(ii) Quando $x=-2$, o lado esquerdo, LE $=3$, o lado direito, LD $=3$

De (i) e (ii), $x=-2$

Resolva as seguintes equações irracionais usando o segundo método, [Res. 2], mostrado no exemplo.

(1) $x+1=\sqrt{5-x}$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$(x+1)^2=5-x$

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$x=-4,\ 1$

Substituindo na equação original,

(i) Quando $x=-4$, LE $=-3$, LD $=3$

Portanto, $x=-4$ é solução incompatível.

(ii) Quando $x=1$, LE $=2$, LD $=2$

De (i) e (ii), $\boldsymbol{x=1}$

(2) $x-1=\sqrt{2x+6}$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$(x-1)^2=2x+6$

$x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$x=5,\ -1$

Substituindo na equação original,

(i) Quando $x=5$, LD $=4$, LE $=4$

(ii) Quando $x=-1$, LD $=-2$, LE $=2$

Portanto, $x=-1$ é solução incompatível.

De (i) e (ii), $\boldsymbol{x=5}$

(3) $\sqrt{x+3}=\dfrac{x+5}{3}$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x+3=\dfrac{(x+5)^2}{9}$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x=-2,\ 1$

Substituindo na equação original,

(i) Quando $x=-2$, LE $=1$, LD $=1$

(ii) Quando $x=1$, LE $=-2$, LD $=2$

De (i) e (ii), $\boldsymbol{x=-2,\ 1}$

Nota: Ao resolver equações irracionais devemos sempre verificar nossas soluções usando o método ① ou ②.

① A solução deve corresponder ao ponto comum no gráfico.

② Substituindo na equação original, devemos demonstrar que LE = LD.

K 165a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(33 pontos)

Resolva as seguintes inequações irracionais, utilizando os gráficos.

Ex.

$\sqrt{2x+1} > x-1$

[Res.] Fazendo $\sqrt{2x+1} = x-1$ ☜ Primeiro, resolva a equação.

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$2x+1 = (x-1)^2$

$x^2-4x = 0$

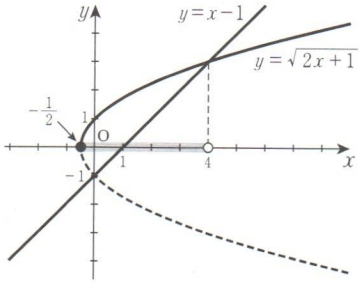
$x(x-4) = 0$

$x = 0,\ 4$

A partir do gráfico, $x = 0$ é solução incompatível.

Assim, $x = 4$

Portanto, $-\frac{1}{2} \leq x < 4$ ☜ Para esses valores de x, o gráfico de $y = \sqrt{2x+1}$ está acima do gráfico de $y = x-1$.



(1) $\sqrt{x+3} < -x+3$

[Res.] Fazendo $\sqrt{x+3} = -x+3$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x+3 = (-x+3)^2$

$x^2-7x+6 = 0$

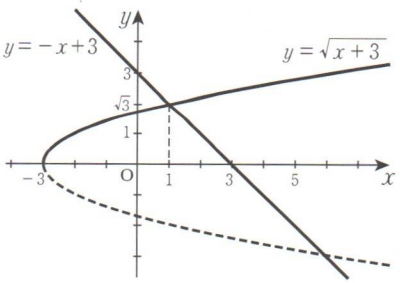
$(x-6)(x-1) = 0$

$x = 6,\ 1$

A partir do gráfico, $x = 6$ é solução incompatível.

Assim, $x = 1$

Portanto, $\boldsymbol{-3 \leq x < 1}$



(2) $\sqrt{x-1} < x-3$

[Res.] Fazendo $\sqrt{x-1} = x-3$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x-1=(x-3)^2$

$x^2-7x+10=0$

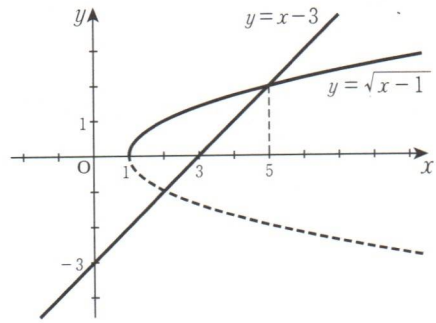
$(x-5)(x-2)=0$

$x=5,\ 2$

A partir do gráfico, $x=2$ é solução incompatível.

Assim, $x=5$

Portanto, $\boldsymbol{x>5}$



(3) $\sqrt{5-2x} > -x+1$

[Res.] Fazendo $\sqrt{5-2x} = -x+1$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$5-2x=(-x+1)^2$

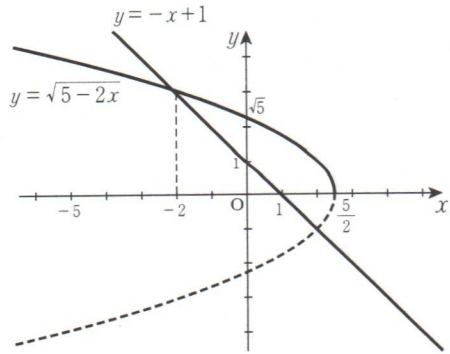
$x^2=4$

$x=\pm 2$

A partir do gráfico, $x=2$ é solução incompatível.

Assim, $x=-2$

Portanto, $\boldsymbol{-2<x\leq \frac{5}{2}}$



K 166a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(25 pontos)

Resolva as seguintes inequações irracionais, utilizando os gráficos.

(1) $\sqrt{5-x} < 3-x$

[Res.] Fazendo $\sqrt{5-x} = 3-x$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$5-x=(3-x)^2$

$x^2-5x+4=0$

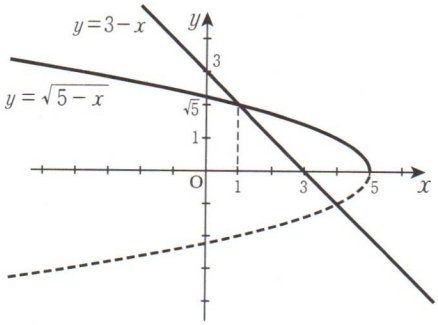
$(x-4)(x-1)=0$

$x=4,\ 1$

A partir do gráfico, $x=4$ é solução incompatível.

Assim, $x=1$

Portanto, $\boldsymbol{x<1}$



(2) $\sqrt{x+3} > \dfrac{x+3}{2}$

[Res.] Fazendo $\sqrt{x+3} = \dfrac{x+3}{2}$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x+3=\dfrac{(x+3)^2}{4}$

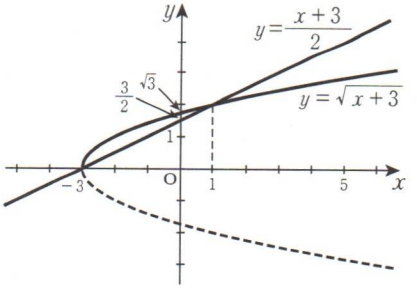
$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3,\ 1$

A partir do gráfico,

$\boldsymbol{-3<x<1}$



(3) $\sqrt{2x+1} > \dfrac{x+2}{2}$

[Res.] Fazendo $\sqrt{2x+1} = \dfrac{x+2}{2}$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$2x+1 = \dfrac{(x+2)^2}{4}$

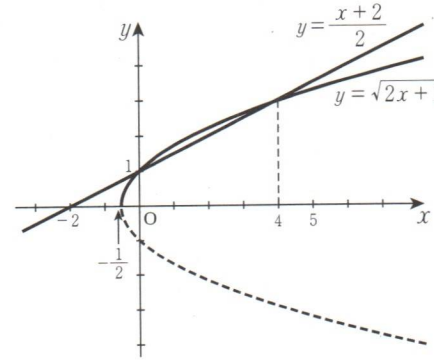
$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$x=0,\ 4$

A partir do gráfico,

$0<x<4$



(4) $\sqrt{2x+1} < \dfrac{x+2}{2}$

[Res.] A partir do gráfico da questão (3),

$-\dfrac{1}{2} \le x < 0,\ x > 4$

K 167a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(33 pontos)

Resolva as seguintes inequações irracionais, utilizando os gráficos.

Ex.

$\sqrt{2x+1} < \sqrt{x} + 1$

[Res.] Fazendo $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$2x+1 = x+2\sqrt{x} + 1$

$x = 2\sqrt{x}$

Elevando novamente ambos os membros ao quadrado,

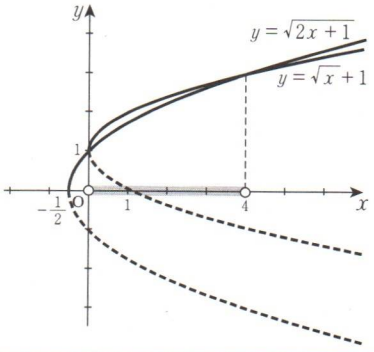
$x^2 = 4x$

$x(x-4) = 0$

$x = 0,\ 4$

A partir do gráfico,

$0 < x < 4$



(1) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{x} + 1$

[Res.] A partir do gráfico no exemplo,

$\boldsymbol{x > 4}$

(2) $\sqrt{x}-1<\sqrt{5-x}$

[Res.] Fazendo $\sqrt{x}-1=\sqrt{5-x}$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x-2\sqrt{x}+1=5-x$

$2x-4=2\sqrt{x}$

$x-2=\sqrt{x}$

Elevando novamente ambos os membros ao quadrado,

$x^2-4x+4=x$

$x^2-5x+4=0$

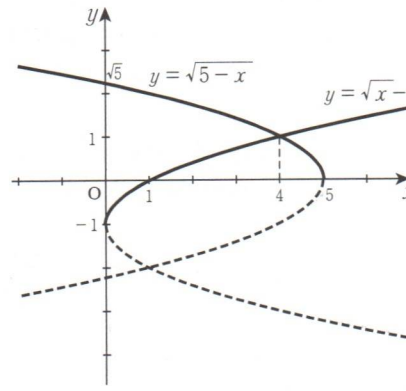
$(x-4)(x-1)=0$

$x=4,\ 1$

A partir do gráfico, $x=1$ é solução incompatível.

Assim, $x=4$

Portanto, $\mathbf{0 \le x < 4}$



(3) $\sqrt{x}-1>\sqrt{5-x}$

[Res.] A partir do gráfico da questão (2),

$\mathbf{4 < x \le 5}$

K 168a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(25 pontos)

1. Resolva a inequação irracional $\sqrt{x} < x < \sqrt{2x+8}$, usando os seguintes métodos.

(1) Resolva $\sqrt{x} < x$, usando o gráfico.

[Res.] Fazendo $\sqrt{x} = x$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

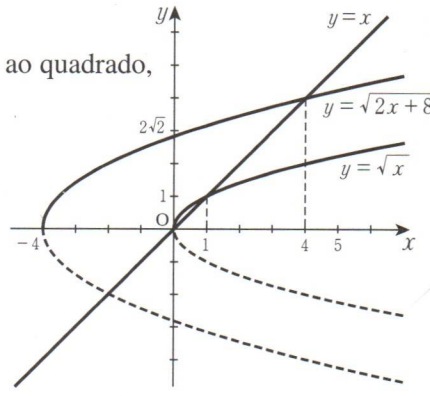
$x = x^2$

$x(x-1) = 0$

$x = 0,\ 1$

A partir do gráfico,

$\boldsymbol{x > 1}$



(2) Resolva $x < \sqrt{2x+8}$, usando o gráfico.

[Res.] Fazendo $x = \sqrt{2x+8}$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x^2 = 2x+8$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x = 4,\ -2$

A partir do gráfico,

$\boldsymbol{-4 \leq x < 4}$

(3) Use os resultados de (1) e (2) para encontrar a solução da inequação $\sqrt{x} < x < \sqrt{2x+8}$.

[Res.] $\boldsymbol{1 < x < 4}$

K 168b

2. Resolva a inequação irracional $\sqrt{6-x} < x < \sqrt{2x+8}$, usando o método apresentado na face a.

[Res.]

(i) $\sqrt{6-x} < x$

Fazendo $\sqrt{6-x} = x$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

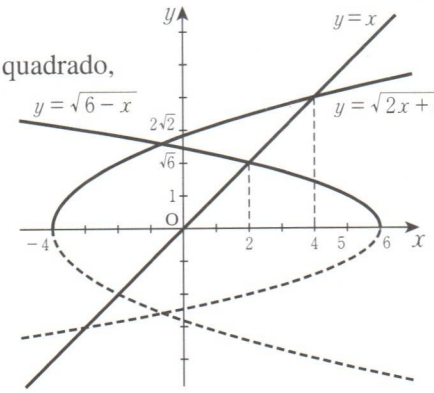
$6-x = x^2$

$(x+3)(x-2) = 0$

$x = -3,\ 2$

A partir do gráfico,

$2 < x \leq 6$



(ii) $x < \sqrt{2x+8}$

Fazendo $x = \sqrt{2x+8}$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x^2 = 2x+8$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x = 4,\ -2$

A partir do gráfico,

$-4 \leq x < 4$

A partir de (i) e (ii), a solução da inequação inicial é:

$\mathbf{2 < x < 4}$

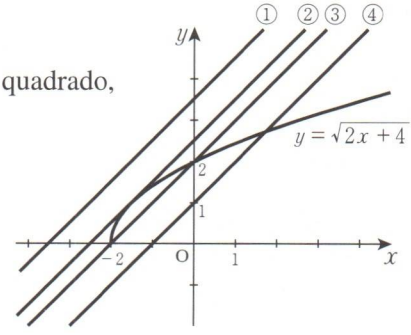
K 169a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(50 pontos)

Ex.

Usando o gráfico, encontre o número de soluções reais da equação irracional:

$\sqrt{2x+4} = x+k$



[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$2x+4 = x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k-1)x+k^2-4=0$

Quando a reta está em ①, não há pontos comuns.

Quando a reta está em ②, ela tangencia.

A partir de $\frac{D}{4} = (k-1)^2-(k^2-4) = -2k+5 = 0$,

$k = \frac{5}{2}$

Quando a reta está em ③, $y = x+k$ passa pelo ponto $(-2,\ 0)$.

A partir de $0 = -2+k$, ☜ Substitua $x = -2$ e $y = 0$ em $y = x+k$.

$k = 2$

Quando a reta está em ④, existe 1 ponto comum.

Portanto:

Quando $k > \frac{5}{2}$, existe(m) **0** solução(ões) real(is).

Quando $k = \frac{5}{2}$, existe(m) **1** solução(ões) real(is).

Quando $2 \le k < \frac{5}{2}$, existe(m) **2** solução(ões) real(is).

Quando $k < 2$, existe(m) **1** solução(ões) real(is).

Respostas: na ordem 0, 1, 2, 1

K 169b

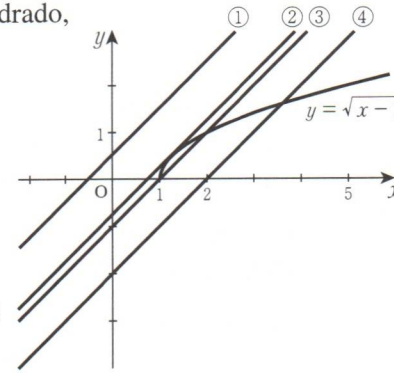
1. Usando o gráfico e o método demonstrado na face a, encontre o número de soluções reais da equação irracional:

$\sqrt{x-1} = x+k$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x-1 = x^2+2kx+k^2$

$x^2+(2k-1)x+k^2+1=0$



Quando a reta está em ①,
não há pontos comuns.

Quando a reta está em ②,
ela tangencia a curva.

A partir de $D=(2k-1)^2-4(k^2+1)$

$=-4k-3=0,$

$k=-\frac{3}{4}$

Quando a reta está em ③, $y=x+k$ passa pelo ponto $(1,\ 0)$.

A partir de $0=1+k$,

$k=-1$

Quando a reta está em ④, existe 1 ponto comum.

Portanto:

Quando $k>-\frac{3}{4}$, existem 0 soluções reais.

Quando $k=-\frac{3}{4}$, existe 1 solução real.

Quando $-1\leq k<-\frac{3}{4}$, existem 2 soluções reais.

Quando $k<-1$, existe 1 solução real.

K 170a KUMON Equações e Inequações Irracionais

(33 pontos)

1. Resolva as seguintes equações irracionais.

(1) $\sqrt{3-x} = -x+1$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$3-x=(-x+1)^2$

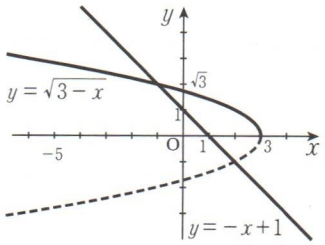
$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$

A partir do gráfico, $x=2$ é solução incompatível.

Portanto, $\boldsymbol{x=-1}$



Solução alternativa

Elevando ambos os membros ao quadrado,
$3-x=(-x+1)^2$
Portanto, $x=2,\ -1$
Substituindo na equação original:
(i) Quando $x=2$, LE = 1, LD = -1
Portanto, $x=2$ é solução incompatível.
(ii) Quando $x=-1$, LE = 2, LD = 2
De (i) e (ii), $\boldsymbol{x=-1}$

(2) $-\sqrt{2x+5} = 2x-1$

[Res.] Elevando ambos os membros ao quadrado,

$2x+5=(2x-1)^2$

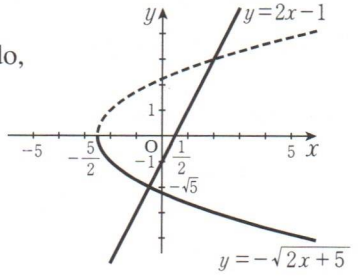
$2x^2-3x-2=0$

$(2x+1)(x-2)=0$

$x=-\dfrac{1}{2},\ 2$

A partir do gráfico, $x=2$ é solução incompatível.

Portanto, $\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$



Solução alternativa

Elevando ambos os membros ao quadrado,
$2x+5=(2x-1)^2$
Portanto, $x=-\dfrac{1}{2},\ 2$
Substituindo na equação original:
(i) Quando $x=-\dfrac{1}{2}$, LE = -2, LD = -2
(ii) Quando $x=2$, LE = -3, LD = 3
Portanto, $x=2$ é solução incompatível.
De (i) e (ii), $\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$

2. Resolva a inequação irracional $\sqrt{2x+4} > \dfrac{2x+1}{2}$.

[Res.] Use $\sqrt{2x+4} = \dfrac{2x+1}{2}$

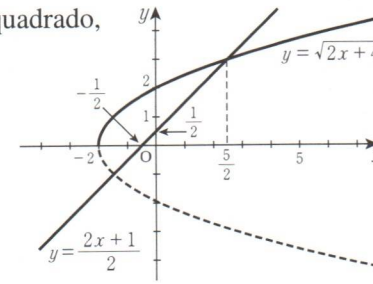
Elevando ambos os membros ao quadrado,

$2x+4 = \dfrac{(2x+1)^2}{4}$

$4x^2-4x-15=0$

$(2x-5)(2x+3)=0$

$x = \dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2}$



A partir do gráfico, $x = -\dfrac{3}{2}$ é solução incompatível.

Assim, $x = \dfrac{5}{2}$

Portanto, $\boldsymbol{-2 \le x < \dfrac{5}{2}}$

Considere isso!

Resolvendo a inequação irracional $\sqrt{x+3} < \dfrac{2}{x}$.

[Res.] Use $\sqrt{x+3} = \dfrac{2}{x}$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$x+3 = \dfrac{4}{x^2}$

$x^3+3x^2-4=0$

$(x-1)(x^2+4x+4)=0$

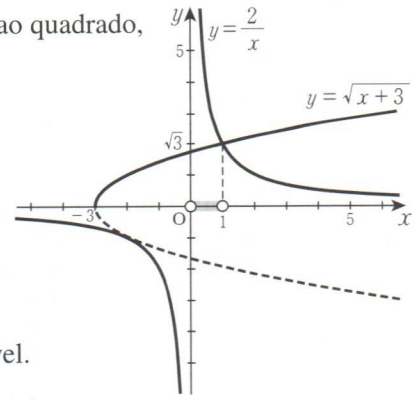
$(x-1)(x+2)^2=0$

$x = 1,\ -2$

A partir do gráfco,

$x = -2$ é solução incompatível.

Portanto, $\boxed{0} < x < \boxed{1}$



Respostas: na ordem 0, 1

K 171a KUMON Funções Exponenciais

(3 pontos)

1. Simplifique as seguintes expressões.

Ex.

$a^3 \times a^4 = a^7$, $a^7 \div a^4 = a^3$, $(a^3)^4 = a^{12}$

(1) $a^2 \times a^7 = \boldsymbol{a^9}$

(2) $a^7 \div a^2 = \boldsymbol{a^5}$

(3) $a^2 \div a^7 = \boldsymbol{\frac{1}{a^5}}$

(4) $a^3 \div a^3 = \boldsymbol{1}$

(5) $(a^3)^5 = \boldsymbol{a^{15}}$

(6) $(ab)^3 = \boldsymbol{a^3 b^3}$

(7) $(a^2b^3)^5 = \boldsymbol{a^{10}b^{15}}$

(8) $(-3a^3b^2)^3 = \boldsymbol{-27a^9b^6}$

(9) $(-2a^4b^5)^4 = \boldsymbol{16a^{16}b^{20}}$

(10) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{a^3}{b^3}}$

(11) $\left(\frac{bc^2}{a^3}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{b^4c^8}{a^{12}}}$

(12) $\left(-\frac{2bc^2}{3a^3}\right)^5 = \boldsymbol{-\frac{32b^5c^{10}}{243a^{15}}}$

Definição de a^0 e a^{-n}

1. Usando $a^m \times a^n = a^{m+n}$, então, quando $m = 0$, encontramos $a^0 \times a^n = a^n$. Assim, $a^0 = 1$.
2. Usando $a^m \div a^n = a^{m-n}$, então, quando $m = 0$, encontramos $1 \div a^n = a^{-n}$. Assim, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Propriedades de Potenciação I

Quando $a \neq 0$, $b \neq 0$,

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad$ $(ab)^m = a^m b^m$

2. Resolva as seguintes expressões.

(1) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

(2) $3^{-4} = \mathbf{\frac{1}{81}}$

(3) $10^0 = \mathbf{1}$

(4) $5^{-1} = \mathbf{\frac{1}{5}}$

(5) $2^{-5} = \mathbf{\frac{1}{32}}$

(6) $2^0 = \mathbf{1}$

3. Calcule as seguintes expressões.

(1) $(3^4)^0 = \mathbf{1}$

(2) $4^3 = 2^{\boxed{6}} = \mathbf{64}$

(3) $4^{-3} = 2^{\boxed{-6}} = \mathbf{\frac{1}{64}}$

(4) $2^4 \times 2^3 = 2^7 = \mathbf{128}$

(5) $2^3 \times 2^{-6} = 2^{-3} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

(6) $3^5 \div 3^2 = 3^3 = \mathbf{27}$

(7) $2^{-1} \div 2^{-4} = 2^3 = \mathbf{8}$

(8) $2^2 \div 2^{-3} = 2^5 = \mathbf{32}$

Nota: "Expoente" é outro nome para "potência" ou "índice". Funções que contenham expoentes normalmente são chamadas funções exponenciais.

K 172a KUMON Funções Exponenciais

(6 pontos)

Propriedades de Potenciação I

Quando $a \neq 0$, $b \neq 0$,

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad$ $(ab)^m = a^m b^m$

1. Use as *Propriedades* acima para simplificar as seguintes expressões.

(1) $a^0 \div a^5 = a^{\boxed{-5}} = \dfrac{1}{\boldsymbol{a^5}}$

(2) $a^{13} \times a^{-3} \div a = \boldsymbol{a^9}$

(3) $a^{-10} \div a^{-3} \times a^4 = a^{-3} = \dfrac{1}{\boldsymbol{a^3}}$

(4) $a^5 \times a^{-7} \times (a^2)^3 = \boldsymbol{a^4}$

(5) $a^0 \times (a^2)^4 \times a^{-12} = a^{-4} = \dfrac{1}{\boldsymbol{a^4}}$

(6) $(a^2)^3 \times a^{-4} \times a^{-2} = \mathbf{1}$

(7) $(a^4)^3 \div (a^3)^5 = a^{-3} = \dfrac{1}{\boldsymbol{a^3}}$

2. Usando as propriedades apresentadas na face a, calcule as seguintes expressões.

(1) $3^{-1} \div 3^2 = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$

(2) $2^3 \times 2^{-2} \div 2^{-1} = 2^2 = 4$

(3) $\dfrac{1}{2^{-2}} = 2^2 = 4$

(4) $(2^3)^{-1} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

(5) $4^2 \times 2^{-6} = 2^4 \times 2^{-6} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

(6) $8^4 \times 16^{-2} \div 64 = 2^{12} \times 2^{-8} \div 2^6 = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

(7) $(3 \times 2^2)^{-2} = 3^{-2} \times 2^{-4} = \dfrac{1}{144}$

(8) $(-3)^2 \times (2^{-3} \times 3^2)^{-1} = 2^3 = 8$

K I73a KUMON Funções Exponenciais

(2 pontos)

1. Resolva as seguintes expressões.

(1) $2^3 = \mathbf{8}$

(2) $(-2)^4 = \mathbf{16}$

(3) $2^5 = \mathbf{32}$

(4) $(-2)^6 = \mathbf{64}$

(5) $2^7 = \mathbf{128}$

(6) $(-2)^8 = \mathbf{256}$

(7) $(-3)^3 = \mathbf{-27}$

(8) $3^4 = \mathbf{81}$

(9) $(-3)^5 = \mathbf{-243}$

(10) $3^6 = \mathbf{729}$

(11) $(-4)^3 = \mathbf{-64}$

(12) $4^4 = \mathbf{256}$

(13) $5^3 = \mathbf{125}$

(14) $(-5)^4 = \mathbf{625}$

(15) $6^3 = \mathbf{216}$

(16) $(-7)^3 = \mathbf{-343}$

2. Resolva as seguintes expressões.

Ex.

$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2$

(1) $\sqrt{25} = \mathbf{5}$

(2) $\sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$

(3) $\sqrt[3]{-27} = \mathbf{-3}$

(4) $\sqrt[3]{64} = \mathbf{4}$

(5) $\sqrt[3]{125} = \mathbf{5}$

(6) $\sqrt[3]{216} = \mathbf{6}$

(7) $\sqrt[4]{16} = \mathbf{2}$

(8) $\sqrt[4]{81} = \mathbf{3}$

(9) $\sqrt[4]{625} = \mathbf{5}$

(10) $\sqrt[5]{32} = \mathbf{2}$

(11) $\sqrt[6]{64} = \mathbf{2}$

(12) $\sqrt[7]{-128} = \mathbf{-2}$

(13) $\sqrt[5]{-243} = \mathbf{-3}$

(14) $\sqrt[4]{256} = \mathbf{4}$

(15) $\sqrt[3]{-64} = \mathbf{-4}$

(16) $\sqrt[3]{-125} = \mathbf{-5}$

(17) $\sqrt[5]{-32} = \mathbf{-2}$

(18) $-\sqrt[5]{32} = \mathbf{-2}$

Nota: O número que, **elevado à potência *n* é igual a *a***, é chamado de raiz enésima de a. Por exemplo, $\sqrt[3]{8}$ é a raiz cúbica de 8, $\sqrt[3]{-8}$ é a raiz cúbica de -8, e $\sqrt[n]{a}$ é a raiz enésima de a.

K I 74a KUMON Funções Exponenciais

(5 pontos)

1. Complete as seguintes questões.

(1) $\sqrt{16} = 4$

(2) As raízes quadradas de 16 são ± 4.

(3) $\sqrt{25} = 5$

(4) As raízes quadradas de 25 são ± 5.

(5) $\sqrt[4]{16} = 2$

(6) As raízes quartas de 16 são ± 2.

(7) $\sqrt[3]{8} = 2$

(8) A raiz cúbica de 8 é 2.

(9) $\sqrt[3]{-8} = -2$

(10) A raiz cúbica de -8 é -2.

(11) A raiz quinta de 32 é 2.

(12) A raiz quinta de -32 é -2.

A quantidade de raízes enésimas de um número:

(i) Quando n é um número par (raiz quadrada, raiz quarta...):
Quando $a > 0$, existem duas raízes enésimas de a, $\sqrt[n]{a}$ e $-\sqrt[n]{a}$.
Quando $a < 0$, as raízes não pertencem ao conjunto dos números reais.

(ii) Quando n é um número ímpar (raiz cúbica, raiz quinta...):
Existe apenas uma raiz real.

No entanto, se incluirmos números complexos, existirão *três* raízes cúbicas, *quatro* raízes quartas, etc. (Ver K I 80.)

Propriedades de Potenciação II

Quando $a>0$, $b>0$ e m, n e p são inteiros positivos:

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ $\qquad$ $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$ $\qquad$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

2. Resolva as seguintes expressões.

(1) $\sqrt[3]{1000} = \mathbf{10}$

(2) $\sqrt[3]{8000} = \mathbf{20}$

(3) $\sqrt{0{,}01} = \mathbf{0{,}1}$

(4) $\sqrt[4]{0{,}0001} = \mathbf{0{,}1}$

(5) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = \mathbf{16}$

(6) $\sqrt[3]{2^6} = 2^2 = \mathbf{4}$

(7) $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^3 = \mathbf{125}$

(8) $\sqrt[3]{8^4} = 2^4 = \mathbf{16}$

K 175a KUMON Funções Exponenciais

(5 pontos)

Propriedades de Potenciação II

Quando $a>0$, $b>0$ e m, n e p são inteiros positivos:

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ $\quad$ $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$ $\quad$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Resolva as seguintes expressões.

(1) $\sqrt[4]{25} = \sqrt{\mathbf{5}}$

(2) $\sqrt{16^3} = \mathbf{64}$

(3) $\sqrt[5]{-\dfrac{1}{32}} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(4) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$

(5) $(\sqrt[3]{-2})^3 = \mathbf{-2}$

(6) $\sqrt[3]{(-2)^3} = \mathbf{-2}$

(7) $\sqrt[4]{(-2)^4} = \mathbf{2}$

(8) $(-\sqrt[3]{3})^9 = \mathbf{-27}$

K 175b

(9) $\sqrt[5]{\sqrt{2^{20}}} = \sqrt[10]{2^{20}} = 2^2 = \mathbf{4}$

(10) $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[6]{2^6} = \mathbf{2}$

(11) $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = \mathbf{3}$

(12) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \mathbf{2}$

(13) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

(14) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(15) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{96}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(16) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{\boxed{\mathbf{2}}}$

(17) $\sqrt{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{16} = \sqrt[3]{\sqrt{16}} = \sqrt[3]{\mathbf{4}}$

K 176a KUMON Funções Exponenciais

(6 pontos)

1. Calcule as seguintes expressões.

(1) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{4^2} = \mathbf{4}$

(2) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = \boxed{\mathbf{2}}$

(3) $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = \mathbf{6}$

(4) $\sqrt[5]{4} \times \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^5} = \mathbf{2}$

(5) $\sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^5 \cdot 2^4} = \mathbf{8}$

(6) $\dfrac{\sqrt[4]{400}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt[4]{20^2}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\mathbf{2}}$

(7) $\sqrt[3]{2} \div \sqrt[3]{16} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(8) $\sqrt[3]{2} \div \sqrt[3]{-16} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{-\sqrt[3]{16}} = -\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

Nota: $\sqrt[3]{-16} = -\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$

Quando n é um número ímpar, $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ (onde $a > 0$).

K 176b

2. Simplifique as seguintes expressões. Assuma $a > 0$.

(1) $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^6} = \boldsymbol{a^2}$

(2) $\sqrt[3]{a^7} \times \sqrt[3]{-a^2} = \sqrt[3]{a^7} \times (-\sqrt[3]{a^2}) = -\sqrt[3]{a^9} = \boldsymbol{-a^3}$

(3) $\sqrt[3]{a^7} \div \sqrt[3]{-a} = \dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{-\sqrt[3]{a}} = -\sqrt[3]{\dfrac{a^7}{a}} = -\sqrt[3]{a^6} = \boldsymbol{-a^2}$

(4) $\sqrt[3]{2a^2} \times \sqrt[3]{4a} = \sqrt[3]{8a^3} = \boldsymbol{2a}$

(5) $\sqrt[3]{-2a^4} \div \sqrt[3]{-16a} = \dfrac{-\sqrt[3]{2a^4}}{-\sqrt[3]{16a}} = \sqrt[3]{\dfrac{2a^4}{16a}} = \sqrt[3]{\dfrac{a^3}{8}} = \boldsymbol{\dfrac{a}{2}}$

(6) $\sqrt[3]{a^{12}} = \boldsymbol{a^4}$

(7) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\boldsymbol{a}}$

(8) $\sqrt{\sqrt[3]{16a^2}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{4a}}$

K 177a KUMON Funções Exponenciais

(5 pontos)

Se $(a^m)^n = a^{mn}$, então, quando $m = \frac{2}{3}$ e $n = 3$, temos $(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^2$.

Isso nos mostra que $a^{\frac{2}{3}}$ é uma raiz cúbica de a^2. Portanto, $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Propriedades de Potenciação III

Quando $a > 0$, m é um inteiro, e n é um inteiro positivo,

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad (a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ )$

1. Reescreva as seguintes expressões.

Ex. $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$, $a^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$

Ex. $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = a^{-\frac{1}{3}}$

(1) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\boldsymbol{a}}$

(2) $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\boldsymbol{a}}$

(3) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{a^2}}$

(4) $a^{-\frac{1}{5}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[5]{\boldsymbol{a}}}$

(5) $a^{-\frac{3}{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[4]{\boldsymbol{a^3}}}$

(6) $\sqrt{a} = \boldsymbol{a^{\frac{1}{2}}}$

(7) $\sqrt[5]{a} = \boldsymbol{a^{\frac{1}{5}}}$

(8) $\sqrt[4]{a^3} = \boldsymbol{a^{\frac{3}{4}}}$

(9) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \boldsymbol{x^{-\frac{1}{4}}}$

(10) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \boldsymbol{x^{-\frac{2}{3}}}$

K 177b

2. Resolva as seguintes expressões.

(1) $9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{3}$

(2) $4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = \mathbf{8}$

(3) $32^{\frac{4}{5}} = (2^5)^{\frac{4}{5}} = 2^4 = \mathbf{16}$

(4) $8^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

(5) $9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \mathbf{\frac{1}{27}}$

(6) $64^{-\frac{2}{3}} = (2^6)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-4} = \mathbf{\frac{1}{16}}$

(7)* $(-64)^{\frac{2}{3}}$

$= (-2^6)^{\frac{2}{3}} = [(-2^6)^2]^{\frac{1}{3}}$

$= (2^{12})^{\frac{1}{3}} = 2^4 = \mathbf{16}$

(8) $\left(-\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = \mathbf{-\frac{2}{3}}$

(9) $(8^{\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{9}}$

$= [(2^3)^{\frac{3}{2}}]^{-\frac{4}{9}} = 2^{-2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

(10) $(27^{-\frac{3}{2}})^{\frac{4}{9}}$

$= [(3^3)^{-\frac{3}{2}}]^{\frac{4}{9}} = 3^{-2} = \mathbf{\frac{1}{9}}$

K 178a · KUMON Funções Exponenciais

(6 pontos)

Calcule as seguintes expressões.

Ex.

$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 2^2 = 4$ $\qquad$ $2^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(1) $2^{-3} \times 2^4 = 2^1 = \mathbf{2}$

(2) $3^{-4} \div 3^{-5} = 3^1 = \mathbf{3}$

(3) $8^{-\frac{1}{3}} \times 9^0 = 8^{-\frac{1}{3}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

(4) $(-3)^0 \times 64^{-\frac{1}{3}} = (2^6)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

(5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} \times 9^0 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \mathbf{\frac{3}{2}}$

(6) $4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 4^1 = \mathbf{4}$

(7) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{1}{3}} \times 8^{-\frac{3}{2}} = 8^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = 8^{-\frac{4}{3}} = (2^3)^{-\frac{4}{3}} = 2^{-4} = \mathbf{\frac{1}{16}}$

K 178b

(8) $8^{\frac{3}{5}} \times 16^{\frac{2}{5}} \times 4^{-\frac{1}{5}} = 2^{\frac{9}{5}} \cdot 2^{\frac{8}{5}} \cdot 2^{-\frac{2}{5}} = 2^3 = \mathbf{8}$

(9) $\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \mathbf{1}$

(10) $\frac{14^5 \times 15^6 \times 6^2}{10^7 \times 21^5} = \frac{2^5 \cdot 7^5 \cdot 5^6 \cdot 3^6 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{2^7 \cdot 5^7 \cdot 3^5 \cdot 7^5} = \mathbf{\frac{27}{5}}$

(11) $(-8)^{\frac{1}{3}} \times 81^{-\frac{1}{4}} = -2 \times \frac{1}{3} = \mathbf{-\frac{2}{3}}$

(12) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \times 216^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \times 6^2 = \mathbf{54}$

(13) $(2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}})^2 = (2^{\frac{1}{2}})^{\boxed{2}} + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} + (2^{-\frac{1}{2}})^{\boxed{2}} = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{9}{2}}$

(14) $(3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}})^2 = (3^{\frac{1}{2}})^2 - 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} + (3^{-\frac{1}{2}})^2 = 3 - 2 + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$

(15) $(5^{\frac{1}{2}} + 5^{-\frac{1}{2}})(5^{\frac{1}{2}} - 5^{-\frac{1}{2}}) = (5^{\frac{1}{2}})^2 - (5^{-\frac{1}{2}})^2 = 5 - \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{24}{5}}$

K 179a KUMON Funções Exponenciais

(6 pontos)

Simplifique cada expressão, e escreva a resposta na forma exponencial.

(1) $\frac{1}{a^4} = a^{\boxed{-4}}$

(2) $\sqrt[3]{a} = a^{\boxed{\frac{1}{3}}}$

(3) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-2} = a^{\frac{1}{3}-2} = \boldsymbol{a^{-\frac{5}{3}}}$

(4) $a\sqrt{a} = a \cdot a^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{a^{\frac{3}{2}}}$

(5) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{a^{\frac{5}{6}}}$

(6) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = \boldsymbol{a^{\frac{13}{12}}}$

(7) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{a^{\frac{1}{6}}}$

(8) $(\sqrt[3]{a^2})^6 = (a^{\frac{2}{3}})^6 = \boldsymbol{a^4}$

(9) $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}=(a\cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{a^{\frac{2}{3}}}$

(10) $\sqrt{a\sqrt{a}}=(a\cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{a^{\frac{3}{4}}}$

(11) $\dfrac{\sqrt{a}}{a}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}=\boldsymbol{a^{-\frac{1}{2}}}$

(12) $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{a^2}=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-2}=\boldsymbol{a^{-\frac{5}{3}}}$

(13) $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}=a\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=\boldsymbol{a^{\frac{7}{6}}}$

(14) $\dfrac{x^2}{y^3}=x^{\boxed{2}}y^{\boxed{-3}}$

(15) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{y^3}=\boldsymbol{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{4}}}$

(16) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{y\sqrt{y}}=\boldsymbol{x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{3}{2}}}$

K 180a KUMON Funções Exponenciais

(9 pontos)

Simplifique as seguintes expressões.

(1) $\sqrt[3]{36} \times \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = \mathbf{12}$

(2) $\sqrt[3]{16} \div \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^{-6}} = 2^{-2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

(3) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^{12} = (\sqrt[6]{2})^{12} = \mathbf{4}$

(4) $32^{-\frac{3}{5}} = (2^5)^{-\frac{3}{5}} = 2^{-3} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

(5) $(64^{-\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}} = [(2^6)^{-\frac{3}{4}}]^{\frac{2}{3}} = 2^{-3} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

(6) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{1}{3}} \times 8^{-\frac{3}{2}} = 8^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = 8^{-\frac{4}{3}} = (2^3)^{-\frac{4}{3}} = 2^{-4} = \mathbf{\frac{1}{16}}$

(7) $2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} \div 6^{\frac{1}{6}} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^0 = \mathbf{\sqrt{2}}$

(8) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{a^{\frac{7}{6}}}$ $\left[=\sqrt[6]{\boldsymbol{a^7}}\right]$

(9) $\sqrt{a^3\cdot\sqrt{a^2}} = (a^3\cdot a)^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{a^2}$

(10) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}} = a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{4}{5}} = \boldsymbol{a^{-\frac{3}{10}}}$ $\left[=\dfrac{1}{\sqrt[10]{\boldsymbol{a^3}}}\right]$

(11) $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = a\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}} = \boldsymbol{a^{\frac{7}{6}}}$ $\left[=\sqrt[6]{\boldsymbol{a^7}}\right]$

Considere isso!

Tente encontrar todas as raízes cúbicas de 8 (incluindo as raízes complexas).

Considerando x a raiz cúbica de 8, então $x^3 = 8$.

Portanto, $x^3 - 8 = 0$

$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$

Assim, $x-2=0$ ou $x^2+2x+4=0$

A partir de $x-2=0$, $x=2$

A partir de $x^2+2x+4=0$, $x=-1\pm\sqrt{3}\,i$ ☜ Através da ***Fórmula de Báskara***

Portanto, a raízes cúbicas de 8 são: 2, $-1+\sqrt{3}\,i$, $-1-\sqrt{3}\,i$

Desafio!

Encontre a raiz cúbica de -1 pelo método descrito acima:

$x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

As raízes cúbicas de -1 são: $\boxed{-1}$, $\boxed{\dfrac{1+\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}}{2}}$, $\boxed{\dfrac{1-\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}}{2}}$

Respostas: -1, $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$

K I 8 I a KUMON Gráfico da Função Exponencial

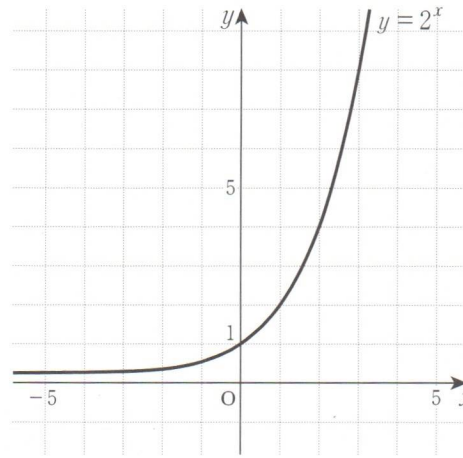
(33 pontos)

Faça o gráfico de cada uma das seguintes funções exponenciais.

Ex.

$y = 2^x$

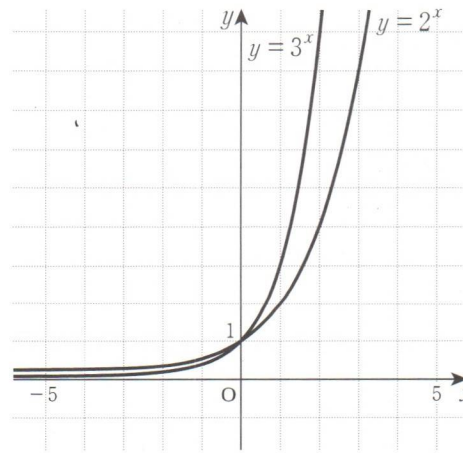
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
1	2
$\frac{3}{2}$	$2\sqrt{2}$
2	4
3	8



Nota: A assíntota de $y = 2^x$ é o eixo x, uma vez que para todos os valores de x, $y > 0$, e o gráfico se aproxima (mas não cruza) do eixo x.

(1) $y = 3^x$

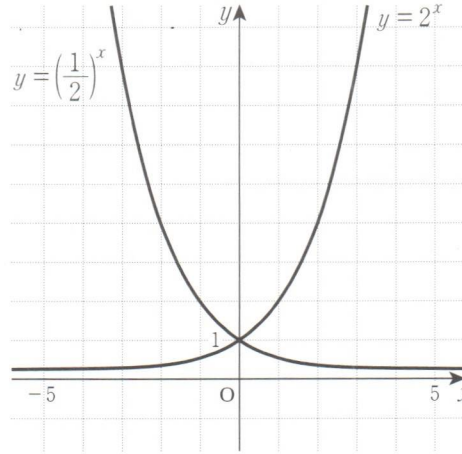
x	y
-2	$\mathbf{\frac{1}{9}}$
$-\frac{3}{2}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{9}}$
-1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$
$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}$
0	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\sqrt{3}}$
1	$\mathbf{3}$
$\frac{3}{2}$	$\mathbf{3\sqrt{3}}$
2	$\mathbf{9}$



A assíntota do gráfico de $y = 3^x$ é o eixo $\boxed{\boldsymbol{x}}$.

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

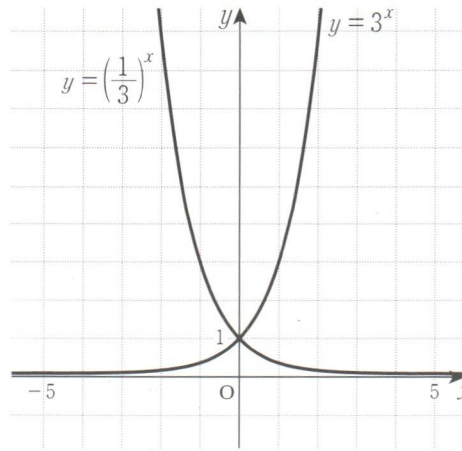
x	y
-3	$\mathbf{8}$
-2	$\mathbf{4}$
$-\frac{3}{2}$	$\mathbf{2\sqrt{2}}$
-1	$\mathbf{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{\sqrt{2}}$
0	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
1	$\mathbf{\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{2}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
2	$\mathbf{\frac{1}{4}}$
3	$\mathbf{\frac{1}{8}}$



A assíntota do gráfico de $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é o eixo $\boxed{\boldsymbol{x}}$.

(3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	y
-2	$\mathbf{9}$
$-\frac{3}{2}$	$\mathbf{3\sqrt{3}}$
-1	$\mathbf{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{\sqrt{3}}$
0	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}$
1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$
$\frac{3}{2}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{9}}$
2	$\mathbf{\frac{1}{9}}$



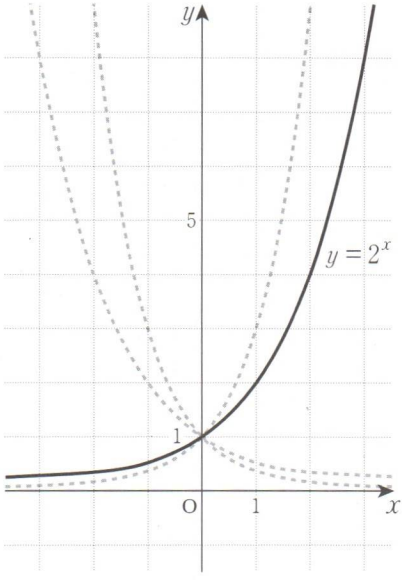
A assíntota do gráfico de $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ é o eixo $\boxed{\boldsymbol{x}}$.

K I 82a KUMON Gráfico da Função Exponencial

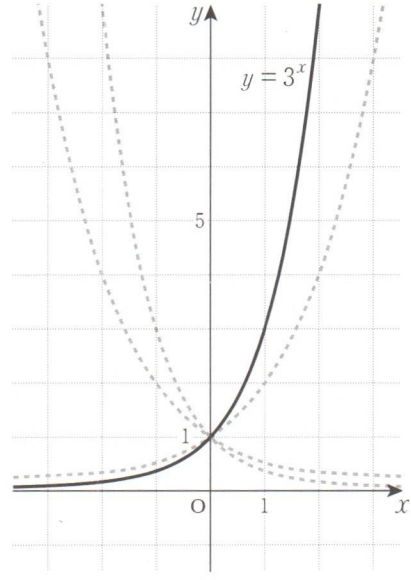
(11 pontos)

1. Trace o gráfico de cada uma das funções exponenciais.

(1) $y = 2^x$



(2) $y = 3^x$



2. Complete os quadros em branco abaixo, usando os gráficos acima.

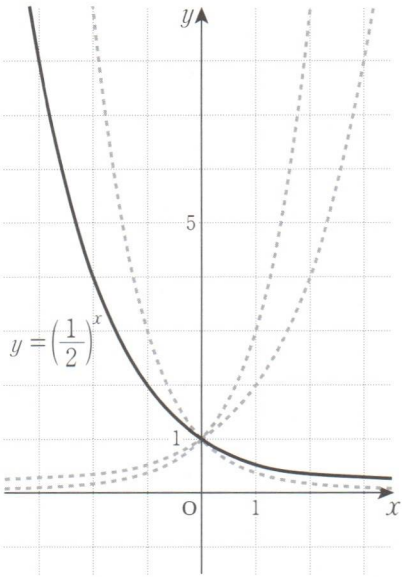
Quando $x < 0$, o gráfico de $y = 2^x$ fica acima de $y = 3^x$.

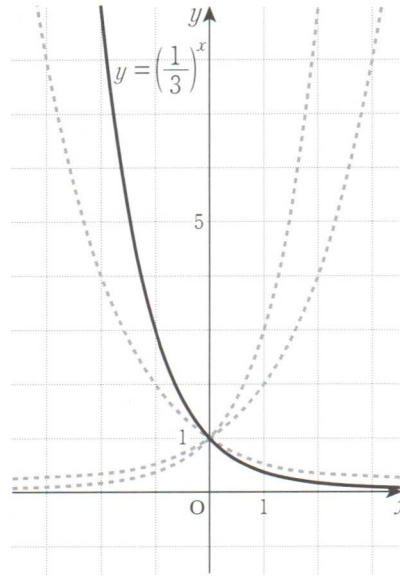
(1) Quando $x = 0$, os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ passam pelo ponto (0, [1]). ☜ $2^0 = 3^0 = 1$

(2) Quando $x > 0$, o gráfico de $y = 2^x$ fica [**abaixo de**] $y = 3^x$.

3. Trace o gráfico de cada uma das funções exponenciais.

(1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$





4. Complete os quadros em branco abaixo, usando os gráficos acima.

(1) Quando $x<0$, o gráfico de $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fica **abaixo de** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

(2) Quando $x=0$, os gráficos de $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ passam pelo ponto $(0,\ \boxed{1}\ )$. $\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$

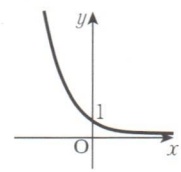
(3) Quando $x>0$, o gráfico de $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fica **acima de** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Resumo

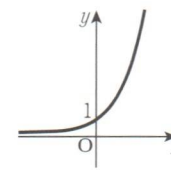
Quando $a>0$ e $a\neq 1$, uma função na forma $y=a^x$ é chamada de função exponencial de x, onde a é a base.

O gráfico de $y=a^x$ passa pelo ponto $(0,\ 1)$, e o eixo x é a assíntota.

Quando $0<a<1$



Quando $a>1$



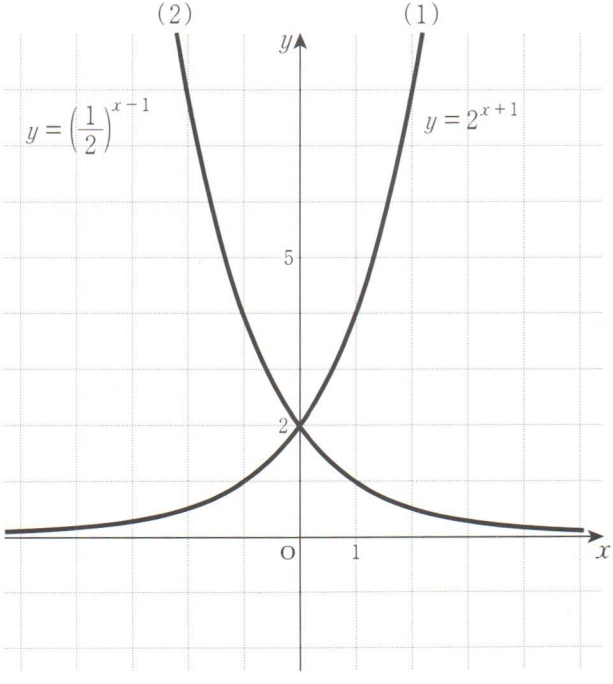
K 183a KUMON Gráfico da Função Exponencial

(25 pontos)

Faça o gráfico das seguintes funções exponenciais.

(1) $y = 2^{x+1}$

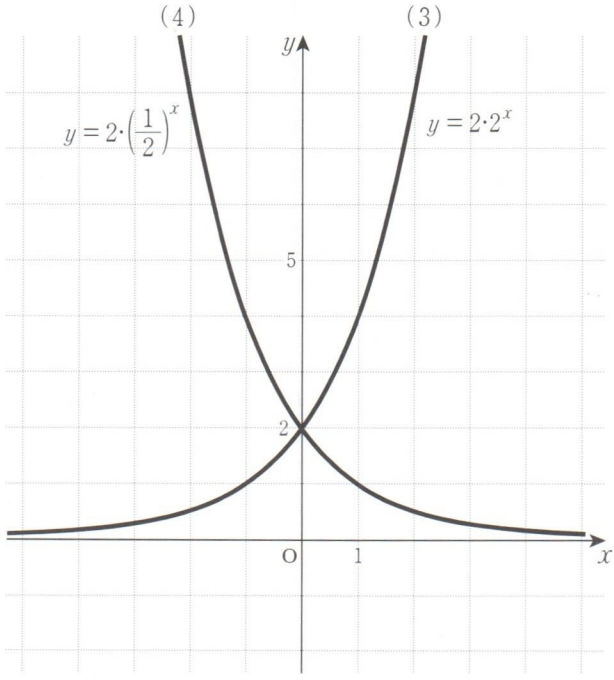
(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$



K 183b

(3) $y = 2 \cdot 2^x$

(4) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$



➢ Os gráficos de $y = 2^{x+1}$ e $y = 2 \cdot 2^x$ são os mesmos. ☜ Veja os gráficos (1) e (3).

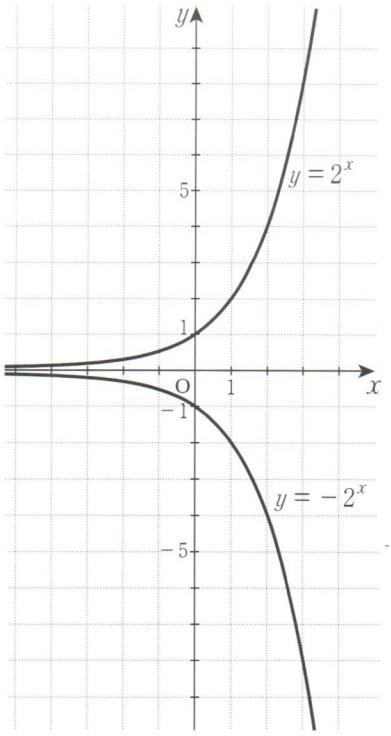
➢ Os gráficos de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ e $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ são os mesmos. ☜ Veja os gráficos (2) e (4).

K 184a KUMON Gráfico da Função Exponencial

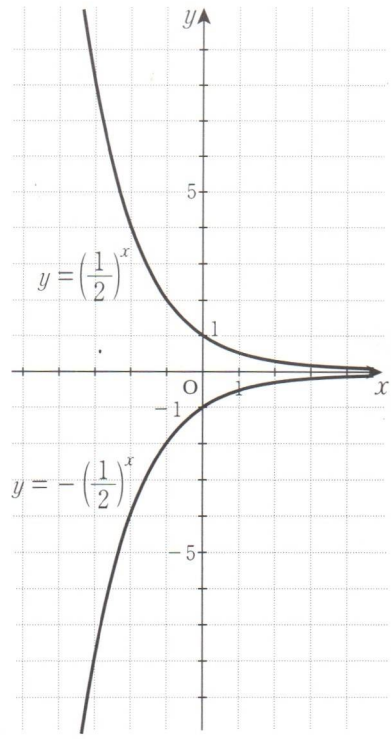
(11 pontos)

1. Faça o gráfico das seguintes funções exponenciais.

(1) $y = -2^x$



(2) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$



2. Complete os quadros em branco abaixo, usando os gráficos acima.

Os gráficos de $y = 2^x$ e $y = -2^x$ são simétricos em relação ao eixo x.

(1) Os gráficos de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ são simétricos em relação ao eixo $\boxed{x}$.

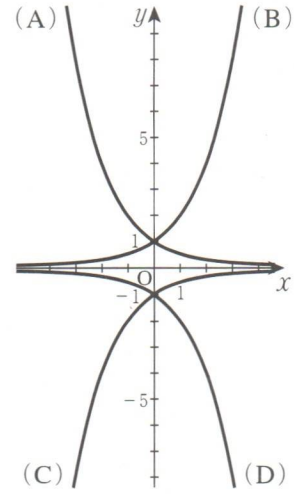
3. Para cada função, associe as letras (A)~(D) do gráfico correspondente.

(1) $y = 2^x$ ··· **(B)**

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ··· **(A)**

(3) $y = -2^x$ ··· **(D)**

(4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ··· **(C)**



4. Complete os quadros em branco abaixo, usando os gráficos acima.

Os gráficos de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = 2^x$ são simétricos em relação ao eixo y.

(1) Os gráficos de $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = -2^x$ são simétricos em relação ao eixo **y**.

(2) Os gráficos de $y = -2^x$ e $y = 2^x$ são simétricos em relação ao eixo **x**.

Considere isso!

Uma vez que $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$,

podemos ver que ela é simétrica a $y = 2^x$ em relação ao eixo **y**.

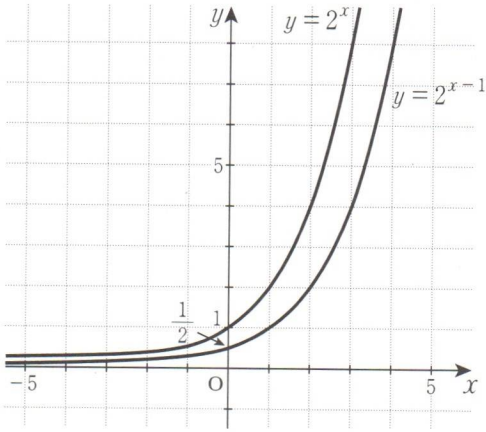
Resposta: y

K 185a KUMON Gráfico da Função Exponencial

(25 pontos)

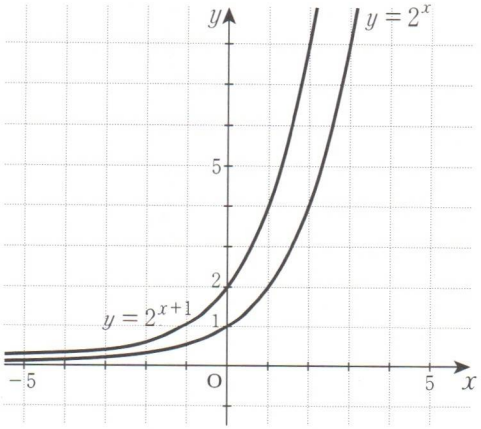
Faça o gráfico das seguintes funções exponenciais.

(1) $y = 2^{x-1}$



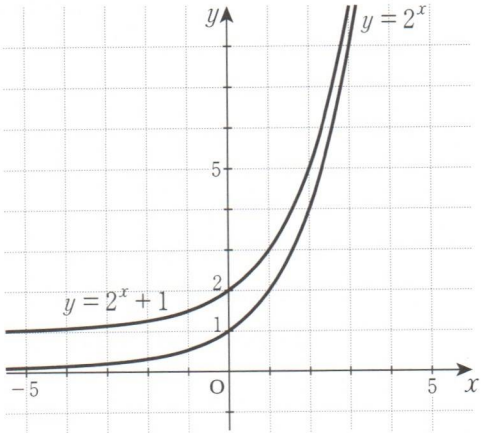
O gráfico de $y = 2^{x-1}$
é um deslocamento de $y = 2^x$,
1 unidade ao longo do eixo x.

(2) $y = 2^{x+1}$



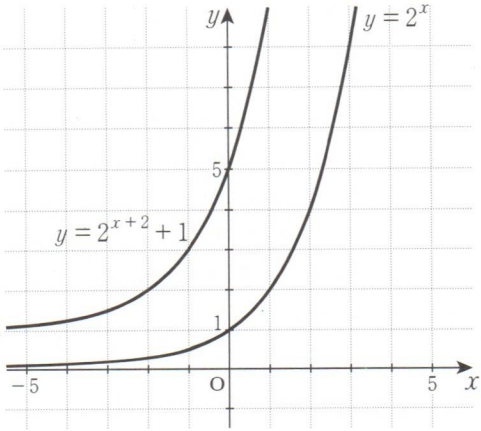
O gráfico de $y = 2^{x+1}$
é um deslocamento de $y = 2^x$,
$\boxed{-1}$ unidade(s) ao longo do
eixo x.

(3) $y = 2^x + 1$



O gráfico de $y = 2^x + 1$ é um deslocamento de $y = 2^x$, [1] unidade(s) ao longo do eixo y.

(4) $y = 2^{x+2} + 1$



O gráfico de $y = 2^{x+2} + 1$ é um deslocamento de $y = 2^x$, [−2] unidade(s) ao longo do eixo x, e [1] unidade(s) ao longo do eixo y.

Nota: O gráfico de $y = a^{x-p} + q$ (onde $a > 0$ e $a \neq 1$) é um deslocamento de $y = a^x$, p unidades ao longo do eixo x, e q unidades ao longo do eixo y.

K 186a KUMON Gráfico da Função Exponencial

(6 pontos)

1. Em cada questão, complete a afirmação descrevendo como o gráfico da função exponencial foi deslocado de $y = 3^x$.

(1) $y = 3^{x-2}$ [Res.] $\boxed{2}$ unidade(s) ao longo do eixo x

(2) $y = 3 \cdot 3^x$ [Res.] Uma vez que $y = 3 \cdot 3^x = 3^{\boxed{x+1}}$,

$\boxed{-1}$ unidade(s) ao longo do eixo x

(3) $y = \dfrac{3^x}{3}$ [Res.] Uma vez que $y = \dfrac{3^x}{3} = 3^{\boxed{x-1}}$,

$\boxed{1}$ unidade(s) ao longo do eixo x

(4) $y = 3^{x+2} + 1$ [Res.] $\boxed{-2}$ unidade(s) ao longo do eixo x, e

$\boxed{1}$ unidade(s) ao longo do eixo y

2. Em cada questão escreva de quanto o gráfico de cada função exponencial foi deslocado de $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

(1) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$ [Res.] **2 unidades ao longo do eixo x**

(2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 2$ [Res.] **-2 unidades ao longo do eixo y**

(3) $y = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ [Res.] Uma vez que $y = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$,

1 unidade ao longo do eixo x

(4) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2} + 2$ [Res.] **-2 unidades ao longo do eixo x, e 2 unidades ao longo do eixo y**

K 186b

3. Encontre as funções cujo o gráfico foi deslocado de $y = 2^x$ da seguinte forma.

(1) 1 unidade ao longo do eixo x [Res.] $y = 2^{\boxed{x-1}}$

(2) -2 unidades ao longo do eixo y [Res.] $\boldsymbol{y = 2^x - 2}$

(3) 2 unidades ao longo do eixo x, e -1 unidade ao longo do eixo y [Res.] $\boldsymbol{y = 2^{x-2} - 1}$

(4) -1 unidade ao longo do eixo x, e 2 unidades ao longo do eixo y [Res.] $\boldsymbol{y = 2^{x+1} + 2}$

4. Encontre as funções cujo o gráfico foi deslocado de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ da seguinte forma.

(1) 1 unidade ao longo do eixo y [Res.] $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1}$

(2) -1 unidade ao longo do eixo x [Res.] $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}}$

(3) 1 unidade ao longo do eixo x, e 3 unidades ao longo do eixo y [Res.] $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 3}$

(4) -3 unidades ao longo do eixo x, e -1 unidade ao longo do eixo y [Res.] $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} - 1}$

K 187a KUMON Gráfico da Função Exponencial

(25 pontos)

1. Compare os seguintes números.

Ex.

$\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[7]{16}$

[Res.] $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = 2^{\frac{7}{3}}$, $\sqrt[7]{16} = \sqrt[7]{2^4} = 2^{\frac{4}{7}}$ Reescreva os números para que suas bases sejam as mesmas, ou seja, 2.

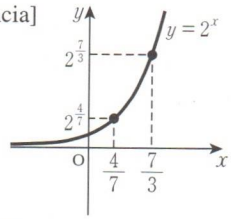
Comparando os expoentes, $\frac{4}{7} < \frac{7}{3}$

Portanto, $2^{\frac{4}{7}} < 2^{\frac{7}{3}}$

Assim, $\sqrt[7]{16} < \sqrt[3]{128}$

Quando a base é maior que 1, os números ficam na mesma ordem que os expoentes.

[Referência]



(1) $\sqrt[7]{64}$, $\sqrt[5]{16}$

[Res.] $\sqrt[7]{64} = \sqrt[7]{2^6} = 2^{\frac{6}{7}}$

$\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$

Comparando os expoentes,

$\frac{4}{5} < \frac{6}{7}$

Portanto, $2^{\frac{4}{5}} < 2^{\frac{6}{7}}$

Assim, $\sqrt[5]{16} < \sqrt[7]{64}$

(2) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[7]{27}$

[Res.] $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[7]{27} = \sqrt[7]{3^3} = 3^{\frac{3}{7}}$

Comparando os expoentes,

$\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$

Portanto, $3^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{3}{7}} < 3^{\frac{1}{2}}$

Assim, $\sqrt[3]{3} < \sqrt[7]{27} < \sqrt[4]{9}$

Dada a função exponencial $y = a^x$ com $a > 1$, então, quanto maior for x, maior será y. Portanto, $p < q \Leftrightarrow a^p < a^q$. (Isso significa que $p < q$, se e somente se, $a^p < a^q$.)

2. Compare os seguintes números.

Ex.

$\frac{1}{4}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$

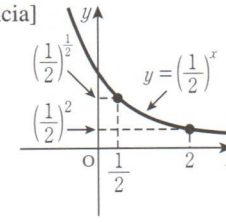
[Res.] $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ☜ Reescreva os números para que suas bases sejam as mesmas, ou seja, $\frac{1}{2}$.

Comparando os expoentes, $\frac{1}{2}<2$ ⤷ Quando a base é menor que 1, os números ficam na ordem inversa dos expoentes.

Portanto, $\left(\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Assim, $\frac{1}{4}<\sqrt{\frac{1}{2}}$

[Referência]



Solução alternativa

Reescreva $\frac{1}{4}=2^{-2}$ e $\sqrt{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$

Comparando os expoentes $-2<-\frac{1}{2}$

Portanto, $\frac{1}{4}<\sqrt{\frac{1}{2}}$

(1) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{9}$

[Res.] $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

Comparando os expoentes,

$\frac{1}{3}<2$

Portanto, $\left(\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

Assim, $\frac{1}{9}<\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

(2) $0{,}5^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $0{,}5^{-2}$

[Res.] $0{,}5^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$0{,}5^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Comparando os expoentes,

$-2<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

Portanto, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Assim, $\sqrt{\frac{1}{2}}<0{,}5^{\frac{1}{3}}<0{,}5^{-2}$

Dada a função exponencial $y=a^x$, com $0<a<1$, quanto maior for x, menor será y. Portanto, $p<q \Leftrightarrow a^p>a^q$. (Isso significa que $p<q$, se e somente se, $a^p>a^q$.)

K 188a KUMON Gráfico da Função Exponencial

(25 pontos)

1. Compare os seguintes números.

Ex.

$\sqrt[3]{49}$, $\sqrt[6]{16}$

[Res.] $\sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{2}{3}}$

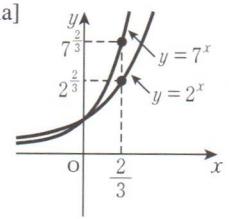
Comparando as bases, $2 < 7$

Portanto, $2^{\frac{2}{3}} < 7^{\frac{2}{3}}$

Assim, $\sqrt[6]{16} < \sqrt[3]{49}$

Uma vez que os expoentes são **iguais e positivos**, os números ficam na mesma ordem que as bases.

[Referência]



(1) $\sqrt[8]{25}$, $\sqrt[12]{27}$

[Res.] $\sqrt[8]{25} = \sqrt[8]{5^2} = 5^{\frac{2}{8}} = 5^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{3^3} = 3^{\frac{3}{12}} = 3^{\frac{1}{4}}$

Comparando as bases, $3 < 5$

Portanto, $3^{\frac{1}{4}} < 5^{\frac{1}{4}}$

Assim, $\mathbf{\sqrt[12]{27} < \sqrt[8]{25}}$

(2) $\sqrt[6]{36}$, $\sqrt[12]{81}$, $\sqrt[9]{125}$

[Res.] $\sqrt[6]{36} = 6^{\frac{2}{6}} = 6^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[12]{81} = \sqrt[12]{3^4} = 3^{\frac{4}{12}} = 3^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[9]{125} = \sqrt[9]{5^3} = 5^{\frac{3}{9}} = 5^{\frac{1}{3}}$

Comparando as bases,

$3 < 5 < 6$

Portanto, $3^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{3}} < 6^{\frac{1}{3}}$

Assim, $\mathbf{\sqrt[12]{81} < \sqrt[9]{125} < \sqrt[6]{36}}$

Dada as funções exponenciais $y = a^x$ e $y = b^x$, quando $a > 0$, $b > 0$ e $p > 0$, $a < b \Leftrightarrow a^p < b^p$. (Isso significa que $a < b$, se e somente se, $a^p < b^p$.)

K 188b

2. Compare os seguintes números.

Ex.

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$

[Res.] $(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$, $(\sqrt[3]{3})^6 = 3^2 = 9$, $(\sqrt[6]{6})^6 = 6$

Portanto, $(\sqrt[6]{6})^6 < (\sqrt{2})^6 < (\sqrt[3]{3})^6$

Assim, $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

Uma vez que os expoentes são **iguais e positivos**, os números ficam na mesma ordem que as bases.

(1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{7}$

[Res.] $(\sqrt{3})^6 = 3^3 = 27$, $(\sqrt[3]{5})^6 = 5^2 = 25$, $(\sqrt[6]{7})^6 = 7$

Portanto, $(\sqrt[6]{7})^6 < (\sqrt[3]{5})^6 < (\sqrt{3})^6$

Assim, $\sqrt[6]{\mathbf{7}} < \sqrt[3]{\mathbf{5}} < \sqrt{\mathbf{3}}$

Solução alternativa

Reescreva os expoentes fracionários usando o MMC.

$\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 27^{\frac{1}{6}} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = (5^2)^{\frac{1}{6}} = 25^{\frac{1}{6}} \\ \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{6}} \end{cases}$

Assim, $\sqrt[6]{\mathbf{7}} < \sqrt[3]{\mathbf{5}} < \sqrt{\mathbf{3}}$

(2) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$

[Res.] $(\sqrt{2})^{12} = 2^6 = 64$, $(\sqrt[3]{3})^{12} = 3^4 = 81$, $(\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$

Portanto, $(\sqrt{2})^{12} < (\sqrt[3]{3})^{12} < (\sqrt[4]{5})^{12}$

Assim, $\sqrt{\mathbf{2}} < \sqrt[3]{\mathbf{3}} < \sqrt[4]{\mathbf{5}}$

Solução alternativa

$\begin{cases} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{12}} = 64^{\frac{1}{12}} \\ \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}} = 81^{\frac{1}{12}} \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = 125^{\frac{1}{12}} \end{cases}$

Assim, $\sqrt{\mathbf{2}} < \sqrt[3]{\mathbf{3}} < \sqrt[4]{\mathbf{5}}$

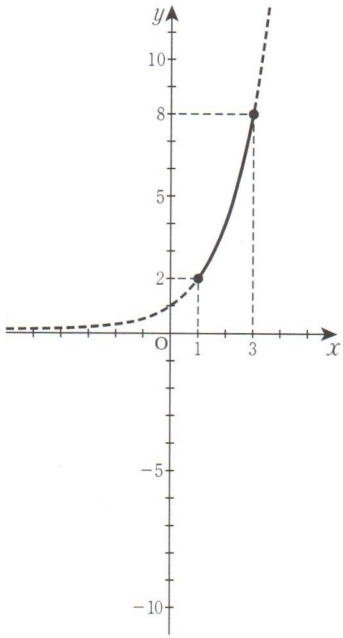
K 189a KUMON Gráfico da Função Exponencial

(33 pontos)

Faça o gráfico de cada função exponencial e encontre os valores máximo e mínimo.

Ex.

$f(x) = 2^x \quad (1 \leq x \leq 3)$

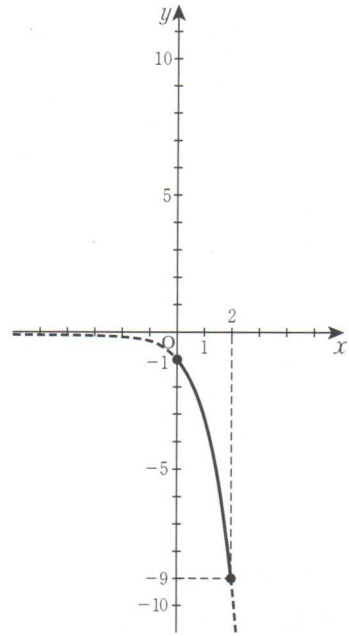


A partir do gráfico:

Valor máximo: $f(3) = 2^3 = 8$

Valor mínimo: $f(1) = 2$

(1) $f(x) = -3^x \quad (0 \leq x \leq 2)$



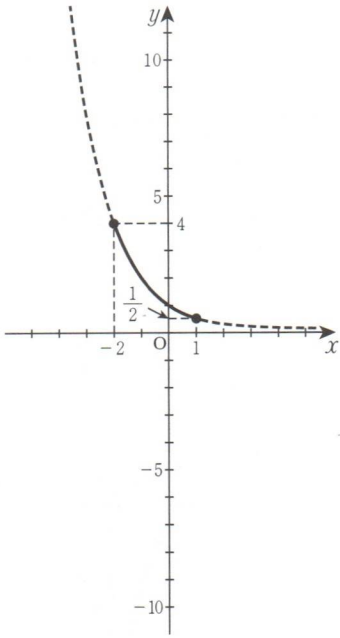
A partir do gráfico:

Valor máximo: $f(0) = -3^0 = -1$

Valor mínimo: $f(2) = -3^2 = -9$

K 189b

(2) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (-2 \le x \le 1)$



A partir do gráfico:

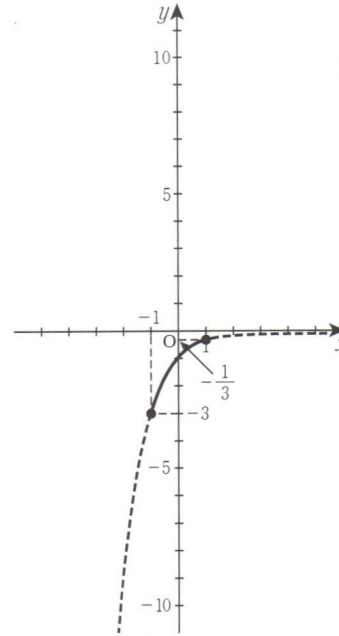
Valor máximo:

$$f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$$

Valor mínimo:

$$f(1)=\frac{1}{2}$$

(3) $f(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^x \quad (-1 \le x \le 1)$



A partir do gráfico:

Valor máximo:

$$f(1)=-\frac{1}{3}$$

Valor mínimo:

$$f(-1)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=-3$$

K 190a KUMON Gráfico da Função Exponencial

(11 pontos)

1. Para cada função, associe as letras (A)~(F) do gráfico correspondente.

(1) $y = 2^x$ ··· **(E)**

(2) $y = 2 \cdot 2^x$ ··· **(C)**

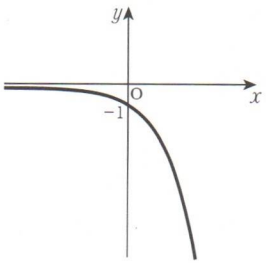
(3) $y = \dfrac{2^x}{2}$ ··· **(F)**

(4) $y = -2^x$ ··· **(A)**

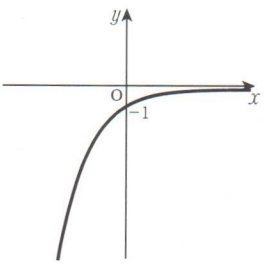
(5) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ ··· **(D)**

(6) $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ ··· **(B)**

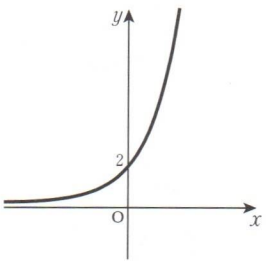
(A)



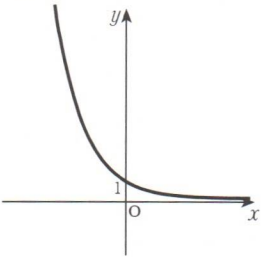
(B)



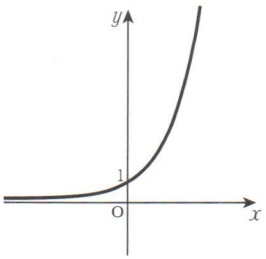
(C)



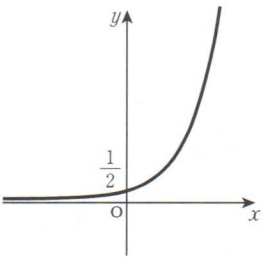
(D)



(E)



(F)



K 190b

2. Escreva como o gráfico de cada função exponencial foi deslocado de $y = 3^x$.

(1) $y = 3 \cdot 3^x$

[Res.] $y = 3^{x+1}$

Portanto, o gráfico foi deslocado **-1 unidade ao longo do eixo x.**

(2) $y = \dfrac{3^x}{3}$

[Res.] $y = 3^{x-1}$

Portanto, o gráfico foi deslocado **1 unidade ao longo do eixo x.**

3. Compare os seguintes números.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2};\quad \sqrt[3]{4};\quad 0,25;\quad \sqrt{\frac{1}{2}}$$

[Res.] $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $0,25 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$; $\sqrt{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Comparando os expoentes,

$$-2 < -\frac{2}{3} < \frac{1}{2} < 2$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Assim,

$$\mathbf{0,25} < \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt[3]{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Solução alternativa

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2$, $\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$

$0,25 = 2^{-2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$

Comparando os expoentes,

$$-2 < -\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 2$$

Portanto,

$$2^{-2} < 2^{-\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^2$$

Assim,

$$\mathbf{0,25} < \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt[3]{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Considere isso!

Qual a espessura (em mm), terá uma página de jornal se a dobrarmos 10 vezes?
(A espessura de uma página de jornal é $0,071$mm, e $2^{10} = 1024$.)

Resposta: 72,704 mm

K 191a KUMON Equações e Inequações Exponenciais

(33 pontos)

Resolva as equações, e marque as soluções encontradas no gráfico.

Ex.

$2^x = 16$

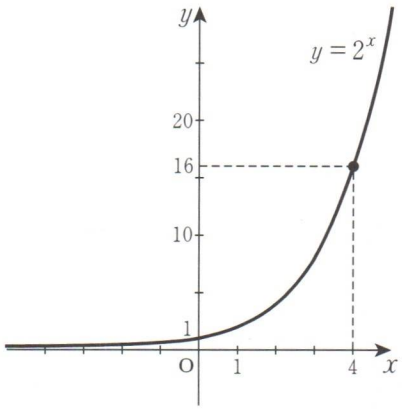
[Res.] Fazendo $y = 2^x$

Quando $y = 16$,

$16 = 2^x$

$2^4 = 2^x$

Portanto, $x = 4$



(1) $3^x = 27$

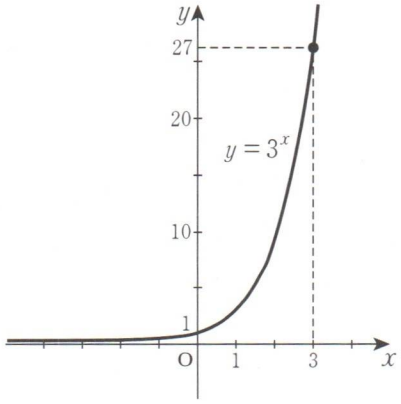
[Res.] Fazendo $y = 3^x$

Quando $y = 27$,

$27 = 3^x$

$3^3 = 3^x$

Portanto, $\boldsymbol{x = 3}$



(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16}$

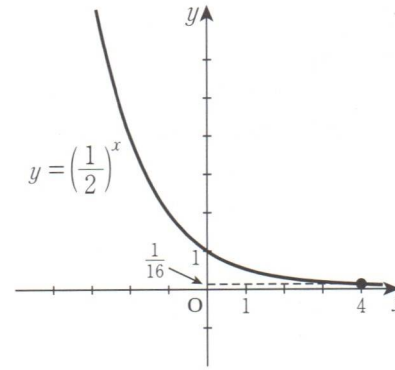
[Res.] Fazendo $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Quando $y = \frac{1}{16}$,

$$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Portanto, $\boldsymbol{x = 4}$



Solução alternativa

$$2^{-4} = 2^{-x}$$
$$-x = -4$$
$$x = 4$$

(3) $2^x = \frac{1}{8}$

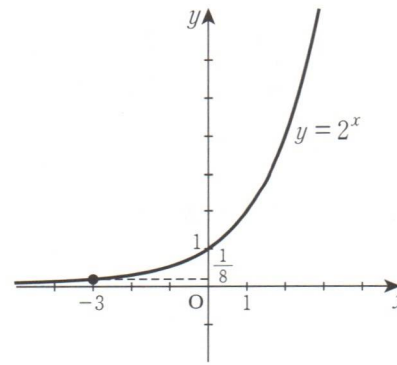
[Res.] Fazendo $y = 2^x$

Quando $y = \frac{1}{8}$,

$$\frac{1}{8} = 2^x$$

$$2^{-3} = 2^x$$

Portanto, $\boldsymbol{x = -3}$



K 192a KUMON Equações e Inequações Exponenciais

(11 pontos)

1. Resolva as seguintes equações.

Ex.

$9^x = 27$

[Res.] $3^{2x} = 3^3$ ☜ Reescreva na base 3.

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

Ex.

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8$

[Res.] $2^{-2x} = 2^3$ ☜ Reescreva na base 2.

$-2x = 3$

$x = -\frac{3}{2}$

(1) $4^x = 8$

[Res.] $2^{2x} = 2^3$

$2x = 3$

$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$

(2) $4^x = \sqrt{8}$

[Res.] $2^{2x} = 2^{\frac{3}{2}}$

$2x = \frac{3}{2}$

$\boldsymbol{x = \frac{3}{4}}$

(3) $\left(\frac{1}{27}\right)^x = 9$

[Res.] $3^{-3x} = 3^2$

$-3x = 2$

$\boldsymbol{x = -\frac{2}{3}}$

(4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt{3}$

[Res.] $3^{-2x} = 3^{\frac{1}{2}}$

$-2x = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{x = -\frac{1}{4}}$

Na expressão, a^x, a é chamado de ***base***.

K 192b

2. Resolva as seguintes equações.

Ex.

$8^x = 2^{x+1}$

[Res.] $2^{3x} = 2^{x+1}$

$3x = x+1$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

(1) $9^x = 3^{x-1}$

[Res.] $3^{2x} = 3^{x-1}$

$2x = x-1$

$\boldsymbol{x = -1}$

(2) $2^{2x} = 16^{x-1}$

[Res.] $2^{2x} = 2^{4(x-1)}$

$2x = 4(x-1)$

$2x = 4$

$\boldsymbol{x = 2}$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 9^x$

[Res.] $3^{-(x-2)} = 3^{2x}$

$-(x-2) = 2x$

$3x = 2$

$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}}$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8^{1-x}$

[Res.] $2^{-2x} = 2^{3(1-x)}$

$-2x = 3(1-x)$

$\boldsymbol{x = 3}$

(5) $(0,1)^x = 10^{x+1}$

[Res.] $10^{-x} = 10^{x+1}$

$-x = x+1$

$2x = -1$

$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$

K 193a KUMON Equações e Inequações Exponenciais

(14 pontos)

Resolva as seguintes equações.

Ex.

$9^x = 3\sqrt{3}$

[Res.] $3^{2x} = 3^{\frac{3}{2}}$ Reescreva na base 3.

$2x = \frac{3}{2}$

$x = \frac{3}{4}$

(1) $8^x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

[Res.] $2^{3x} = 2^{-\frac{3}{2}}$

$3x = -\frac{3}{2}$

$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2\sqrt[3]{2}$

[Res.] $2^{-(x-1)} = 2^{\frac{4}{3}}$

$-(x-1) = \frac{4}{3}$

$\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$

[Res.] $2^{-2x} = 2^{-\frac{3}{4}}$

$-2x = -\frac{3}{4}$

$\boldsymbol{x = \frac{3}{8}}$

(4) $8^{x+1} = 4\sqrt[3]{2}$

[Res.] $2^{3(x+1)} = 2^{\frac{7}{3}}$

$3(x+1) = \frac{7}{3}$

$3x = -\frac{2}{3}$

$\boldsymbol{x = -\frac{2}{9}}$

(5) $2^{x-1} = 0,25$

[Res.] $2^{x-1} = \frac{1}{4}$

$2^{x-1} = 2^{-2}$

$x-1 = -2$

$\boldsymbol{x = -1}$

(6) $10^{3x-1} = 0,01$

[Res.] $10^{3x-1} = 10^{-2}$

$3x-1 = -2$

$3x = -1$

$\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}}$

(7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$ *Dica*

[Res.] $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x+1}$

$x = -x+1$

$2x = 1$

$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$

Dica

Reescreva para que ambos os membros tenham a mesma base, $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{2}$.

K 194a KUMON Equações e Inequações Exponenciais

(33 pontos)

Resolva as seguintes equações.

Ex.

$2^{2x+1}+3\cdot 2^x-2=0$

[Res.]

$2(2^x)^2+3\cdot 2^x-2=0$

Seja $2^x=X$ (onde $X>0$)

$2X^2+3X-2=0$

$(2X-1)(X+2)=0$

$X=\frac{1}{2},\ -2$

Uma vez que $X>0$, $X=-2$ é solução incompatível.

Portanto,

$X=\frac{1}{2}$ ← Uma vez que $X=2^x$.

$2^x=\frac{1}{2}$

$x=-1$

Nota: $X=-2$ corresponde a $2^x=-2$, que não tem solução.

(1) $4^x-2^{x+1}-8=0$

[Res.] $2^{2x}-2\cdot 2^x-8=0$

$(2^x)^2-2\cdot 2^x-8=0$

Seja $2^x=X$ (onde $X>0$)

$X^2-2X-8=0$

$(X-4)(X+2)=0$

$X=4,\ -2$

Uma vez que $X>0$, $X=-2$ é solução incompatível.

Portanto,

$X=4$

$2^x=4$

$\boldsymbol{x=2}$

(2) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

[Res.] $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Seja $2^x = X$ (onde $X > 0$)

$X^2 - 6X + 8 = 0$

$(X-4)(X-2) = 0$

$X = 4,\ 2$

Uma vez que $X > 0$, ambas as soluções se aplicam.

Portanto,

Quando $X = 4$

$2^x = 4$

$x = 2$

Quando $X = 2$

$2^x = 2$

$x = 1$

Portanto, $\boldsymbol{x = 2,\ 1}$

(3) $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x = 1$

[Res.] $3 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 1 = 0$

$3(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 1 = 0$

Seja $3^x = X$ (onde $X > 0$)

$3X^2 + 2X - 1 = 0$

$(3X-1)(X+1) = 0$

$X = \frac{1}{3},\ -1$

Uma vez que $X > 0$, $X = -1$ é solução incompatível.

Portanto,

$X = \frac{1}{3}$

$3^x = \frac{1}{3}$

$\boldsymbol{x = -1}$

K 195a KUMON Equações e Inequações Exponenciais

(33 pontos)

1. Resolva as seguintes equações.

(1) $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} = 27$

[Res] $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

$(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

Seja $3^x = X$ (onde $X > 0$)

$X^2 - 6X - 27 = 0$

$(X-9)(X+3) = 0$

$X = 9,\ -3$

Uma vez que $X > 0$, $X = -3$ é solução incompatível.

Portanto,

$X = 9$

$3^x = 9$

$\boldsymbol{x = 2}$

(2) $9^{x^2} - 3^{x+1} = 0$

[Res.] $3^{2x^2} = 3^{x+1}$

$2x^2 = x + 1$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$(2x+1)(x-1) = 0$

$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2},\ 1}$

2. Resolva as seguintes equações.

Ex.

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^{x+y} = 8 \end{cases}$$

[Res.] $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x \cdot 2^y = 8 \end{cases}$

Seja $2^x = X$ (quando $X > 0$)

$2^y = Y$ (quando $Y > 0$)

Substituindo,

$$\begin{cases} X + Y = 6 & \cdots ① \\ XY = 8 & \cdots ② \end{cases}$$

A partir de ① e ②,

$$\begin{cases} X = 2 \\ Y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 4 \\ Y = 2 \end{cases}$$

Quando $\begin{cases} X = 2 \\ Y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^y = 4 \end{cases}$ portanto, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Quando $\begin{cases} X = 4 \\ Y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^y = 2 \end{cases}$ portanto, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Res. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 3^x - 3^y = 6 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$

[Res.] $\begin{cases} 3^x - 3^y = 6 \\ 3^x \cdot 3^y = 27 \end{cases}$

Seja $3^x = X$ (onde $X > 0$)

$3^y = Y$ (onde $Y > 0$)

Substituindo,

$$\begin{cases} X - Y = 6 & \cdots ① \\ XY = 27 & \cdots ② \end{cases}$$

A partir de ① e ②,

$$\begin{cases} X = -3 \\ Y = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 9 \\ Y = 3 \end{cases}$$

Uma vez que $X > 0$, $Y > 0$

$\begin{cases} X = -3 \\ Y = -9 \end{cases}$ é solução incompatível.

Quando $\begin{cases} X = 9 \\ Y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3^x = 9 \\ 3^y = 3 \end{cases}$ portanto, $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$

K 196a KUMON Equações e Inequações Exponenciais

(12 pontos)

1. Resolva as seguintes inequações.

Ex.

$9^x < 27$

[Res.] $3^{2x} < 3^3$

$2x < 3$

$x < \frac{3}{2}$

Uma vez que as bases são **iguais e maiores que 1**, os expoentes seguem a mesma ordem das bases.

(1) $3^{2x-1} < 27$

[Res.] $3^{2x-1} < 3^3$

$2x - 1 < 3$

$\boldsymbol{x < 2}$

(2) $9^x > 3\sqrt{3}$

[Res.] $3^{2x} > 3^{\frac{3}{2}}$

$2x > \frac{3}{2}$

$\boldsymbol{x > \frac{3}{4}}$

(3) $4^{x+2} \geq 8^x$

[Res.] $2^{2(x+2)} \geq 2^{3x}$

$2(x+2) \geq 3x$

$\boldsymbol{x \leq 4}$

(4) $3^{x+3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x$

[Res.] $3^{x+3} \leq 3^{-x}$

$x + 3 \leq -x$

$2x \leq -3$

$\boldsymbol{x \leq -\frac{3}{2}}$

K 196b

2. Resolva as seguintes inequações.

Ex.

$\left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{8}$

[Res.] $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$2x > 3$

$x > \frac{3}{2}$

Uma vez que as bases são **iguais e menores que 1**, os expoentes ficam na ordem inversa das bases.

(1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} < \frac{1}{27}$

[Res.] $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x} < \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$4x > 3$

$\boldsymbol{x > \frac{3}{4}}$

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$

[Res.] $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-x+1}$

$x \leq -x+1$

$2x \leq 1$

$\boldsymbol{x \leq \frac{1}{2}}$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > 0,125$

[Res.] $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$x+1 < 3$

$\boldsymbol{x < 2}$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \leq \sqrt[3]{9}$

[Res.] $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$1-x \geq -\frac{2}{3}$

$\boldsymbol{x \leq \frac{5}{3}}$

Solução alternativa

$3^{-1+x} \leq 3^{\frac{2}{3}}$

$-1+x \leq \frac{2}{3}$

$\boldsymbol{x \leq \frac{5}{3}}$

K 197a KUMON Equações e Inequações Exponenciais

(33 pontos)

Resolva as seguintes inequações.

Ex.

$2^{2x+1}+3\cdot 2^x-2<0$

[Res.]

$2(2^x)^2+3\cdot 2^x-2<0$

Seja $2^x=X$ (onde $X>0$)

$2X^2+3X-2<0$

$(X+2)(2X-1)<0$

$-2<X<\frac{1}{2}$

Uma vez que $X>0$,

$0<X<\frac{1}{2}$

$0<2^x<\frac{1}{2}$

$x<-1$

(1) $4^x-2^{x+1}-8>0$

[Res.] $2^{2x}-2\cdot 2^x-8>0$

$(2^x)^2-2\cdot 2^x-8>0$

Seja $2^x=X$ (onde $X>0$)

$X^2-2X-8>0$

$(X+2)(X-4)>0$

$X<-2,\ X>4$

Uma vez que $X>0$,

$X>4$

$2^x>4$

$\boldsymbol{x>2}$

K 197b

(2) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 < 0$

[Res.] $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

Seja $2^x = X$ (onde $X > 0$)

$X^2 - 6X + 8 < 0$

$(X-2)(X-4) < 0$

$2 < X < 4$

$2 < 2^x < 4$

$\mathbf{1 < x < 2}$

(3) $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x \geq 1$

[Res.] $3 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 1 \geq 0$

$3(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 1 \geq 0$

Seja $3^x = X$ (onde $X > 0$)

$3X^2 + 2X - 1 \geq 0$

$(X+1)(3X-1) \geq 0$

$X \leq -1,\ X \geq \frac{1}{3}$

Uma vez que $X > 0$,

$X \geq \frac{1}{3}$

$3^x \geq \frac{1}{3}$

$\boldsymbol{x \geq -1}$

K 198a KUMON Equações e Inequações Exponenciais

(50 pontos)

1. Para cada função, encontre os valores máximo e mínimo em cada domínio dado.

Ex.

$y = 3 \cdot 2^x \quad (-1 \leq x \leq 1)$

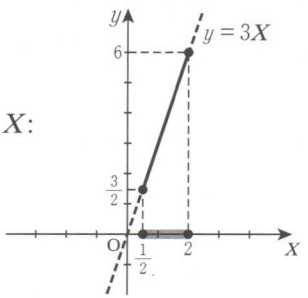
[Res.] Seja $2^x = X$, assim, $y = 3X$

Determinando o intervalo de valores de X:

Quando $x = -1$, $X = \frac{1}{2}$

Quando $x = 1$, $X = 2$

Portanto, $\frac{1}{2} \leq X \leq 2$



(Desenhe o gráfico usando X no eixo horizontal.)

A partir do gráfico de $y = 3X$:

O valor máximo, quando $X = 2$, (ou seja, quando $x = 1$), é 6.

Escreva a condição para x.

O valor mínimo, quando $X = \frac{1}{2}$, (ou seja, quando $x = -1$), é $\frac{3}{2}$.

(1) $y = 2^x + 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$

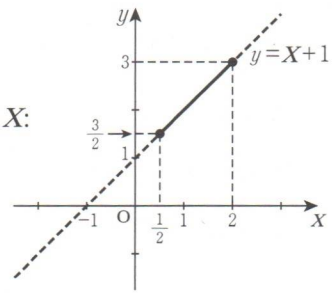
[Res.] Seja $2^x = X$, e assim, $y = X + 1$

Determinando o intervalo de valores de X:

Quando $x = -1$, $X = \frac{1}{2}$

Quando $x = 1$, $X = 2$

Portanto, $\frac{1}{2} \leq X \leq 2$



(Desenhe o gráfico usando X no eixo horizontal.)

A partir do gráfico de $y = X + 1$:

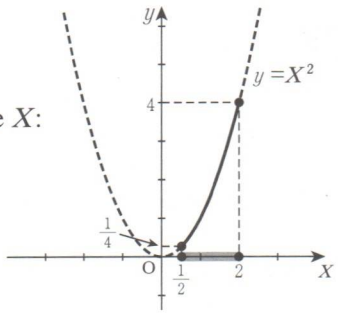
O valor máximo, quando $X = 2$, (ou seja, quando $\boldsymbol{x = 1}$), **é 3.**

O valor mínimo, quando $X = \frac{1}{2}$, (ou seja, **quando** $\boldsymbol{x = -1}$), **é** $\boldsymbol{\frac{3}{2}}$.

2. Para cada função, encontre os valores máximo e mínimo em cada domínio dado.

Ex.

$y = 2^{2x}$ $(-1 \le x \le 1)$



(Desenhe o gráfico usando X no eixo horizontal.)

[Res.] Seja $2^x = X$, assim, $y = X^2$

Determinando o intervalo de valores de X:

Quando $x = -1$, $X = \frac{1}{2}$

Quando $x = 1$, $X = 2$

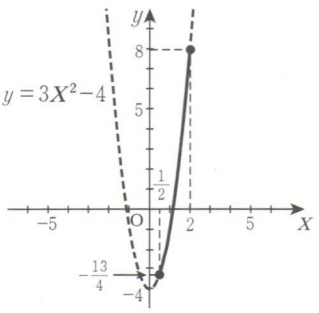
Portanto, $\frac{1}{2} \le X \le 2$

A partir do gráfico de $y = X^2$:

O valor máximo, quando $X = 2$, (ou seja, quando $x = 1$), é 4.

O valor mínimo, quando $X = \frac{1}{2}$, (ou seja, quando $x = -1$), é $\frac{1}{4}$.

(1) $y = 3 \cdot 2^{2x} - 4$ $(-1 \le x \le 1)$



(Desenhe o gráfico usando X no eixo horizontal.)

[Res.] Seja $2^x = X$, assim, $y = 3X^2 - 4$

Determinando o intervalo de valores de X:

Quando $x = -1$, $X = \frac{1}{2}$

Quando $x = 1$, $X = 2$

Portanto, $\frac{1}{2} \le X \le 2$

A partir do gráfico de $y = 3X^2 - 4$:

O valor máximo, quando $X = 2$, (ou seja, **quando $x = 1$), é 8.**

O valor mínimo, quando $X = \frac{1}{2}$, (ou seja, **quando $x = -1$), é $-\frac{13}{4}$.**

K 199a KUMON Equações e Inequações Exponenciais

(33 pontos)

Para as seguintes funções, encontre os valores máximo e mínimo em cada domínio dado.

Ex.

$y = 2^{2x} - 2^{x+1} - 1 \quad (-1 \le x \le 2)$

[Res.] $y = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 1$

Seja $2^x = X$ (quando $X > 0$)

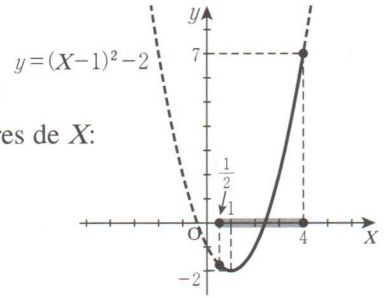
$y = X^2 - 2X - 1 = (X-1)^2 - 2$

Determinando o intervalo de valores de X:

Quando $x = -1$, $X = \frac{1}{2}$

Quando $x = 2$, $X = 4$

Portanto, $\frac{1}{2} \le X \le 4$



(Desenhe o gráfico usando X no eixo horizontal.)

A partir do gráfico:

O valor máximo, quando $X = 4$, $(4-1)^2 - 2 = 7$

(ou seja, quando $x = 2$), é 7.

O valor mínimo, quando $X = 1$, (ou seja, quando $x = 0$), é -2.

(1) $y = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 \quad (-1 \le x \le 2)$

[Res.] $y = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1$

Seja $2^x = X$ (onde $X > 0$)

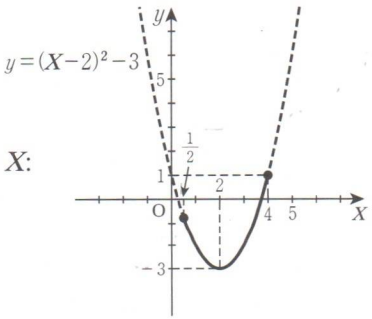
$y = X^2 - 4X + 1 = (X-2)^2 - 3$

Determinando o intervalo de valores de X:

Quando $x = -1$, $X = \frac{1}{2}$

Quando $x = 2$, $X = 4$

Portanto, $\frac{1}{2} \le X \le 4$



(Desenhe o gráfico usando X no eixo horizontal.)

A partir do gráfico:

O valor máximo, quando $X = 4$, (ou seja, **quando $x = 2$), é 1.**

O valor mínimo, quando $X = 2$, (ou seja, **quando $x = 1$), é -3.**

K 199b

(2) $y = 4^x + 2^{x+1} - 1 \quad (-1 \le x \le 1)$

[Res.] $y = (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 1$

Seja $2^x = X$ (onde $X > 0$)

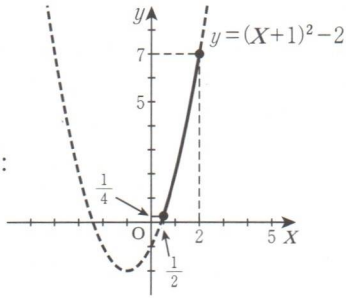
$y = X^2 + 2X - 1 = (X+1)^2 - 2$

Determinando o intervalo de valores de X:

Quando $x = -1$, $X = \frac{1}{2}$

Quando $x = 1$, $X = 2$

Portanto, $\frac{1}{2} \le X \le 2$



(Desenhe o gráfico usando X no eixo horizontal.)

A partir do gráfico:

O valor máximo, quando $X = 2$, (ou seja, **quando $x = 1$), é 7.**

O valor mínimo, quando $X = \frac{1}{2}$, (ou seja, **quando $x = -1$), é $\frac{1}{4}$.**

(3) $y = -3^{2x} + 2 \cdot 3^x + 4 \quad (-1 \le x \le 1)$

[Res.] $y = -(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x + 4$

Seja $3^x = X$ (onde $X > 0$)

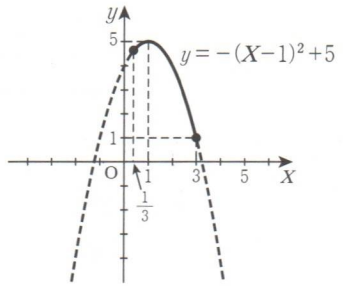
$y = -X^2 + 2X + 4 = -(X-1)^2 + 5$

Determinando o intervalo de valores de X:

Quando $x = -1$, $X = \frac{1}{3}$

Quando $x = 1$, $X = 3$

Portanto, $\frac{1}{3} \le X \le 3$



(Desenhe o gráfico usando X no eixo horizontal.)

A partir do gráfico:

O valor máximo, quando $X = 1$, (ou seja, **quando $x = 0$), é 5.**

O valor mínimo, quando $X = 3$, (ou seja, **quando $x = 1$), é 1.**

(20 pontos)

1. Resolva as seguintes equações e inequações exponenciais.

(1) $4^{x+1}=8\sqrt{2}$

[Res.] $2^{2(x+1)}=2^{\frac{7}{2}}$

$2(x+1)=\frac{7}{2}$

$\boldsymbol{x=\frac{3}{4}}$

(2) $2^{2x}-2^{x+1}-8=0$

[Res.] $(2^x)^2-2\cdot 2^x-8=0$

Seja $2^x=X$ (onde $X>0$)

$X^2-2X-8=0$

$(X-4)(X+2)=0$

$X=4,\ -2$

Uma vez que $X>0$, $X=-2$ é solução incompatível.

Portanto,

$X=4$

$2^x=4$

$\boldsymbol{x=2}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

[Res.] $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

$2x<x-1$

$\boldsymbol{x<-1}$

Solução alternativa

$2^{-2x}>2^{-x+1}$

$-2x>-x+1$

$-x>1$

$\boldsymbol{x<-1}$

(4) $9^x-3^{x+1}-54>0$

[Res.] $3^{2x}-3\cdot 3^x-54>0$

$(3^x)^2-3\cdot 3^x-54>0$

Seja $3^x=X$ (onde $X>0$)

$X^2-3X-54>0$

$(X+6)(X-9)>0$

$X<-6,\ X>9$

Uma vez que $X>0$,

$X>9$

$3^x>9$

$\boldsymbol{x>2}$

2. Para a seguinte função, encontre os valores máximo e mínimo no domínio dado.

$y = -4^x + 2^{x+1} + 4 \quad (-2 \le x \le 1)$

[Res.] $y = -(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x + 4$

Seja $2^x = X$ (com $X > 0$)

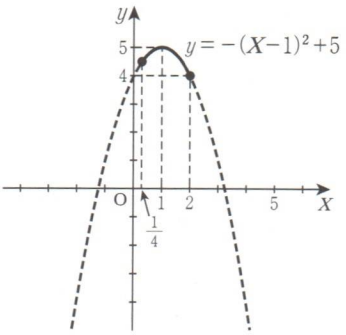
$y = -X^2 + 2X + 4 = -(X-1)^2 + 5$

Determinando o intervalo de valores de X:

Quando $x = -2$, $X = \frac{1}{4}$

Quando $x = 1$, $X = 2$

Portanto, $\frac{1}{4} \le X \le 2$



(Desenhe o gráfico usando X no eixo horizontal.)

A partir do gráfico:

O valor máximo, quando $X = 1$, (ou seja, **quando $x = 0$), é 5.**

O valor mínimo, quando $X = 2$, (ou seja, **quando $x = 1$), é 4.**